Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang **Sommersemester 2006**

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 2

Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $T : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ein Zufallsvektor. Die *momenterzeugende Funktion* von T ist $M_T(u) = E\exp(u^\top T)$.

6. Falls M_T in einer Umgebung von 0 existiert, so existieren alle Momente $\alpha_{r_1,\dots,r_d} = ET_1^{r_1}\dots T_d^{r_d}$ und sind die Koeffizienten der Reihenentwicklung

$$M_T(u) = \sum_{r_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_d=0}^{\infty} \alpha_{r_1,\dots,r_d} \frac{u_1^{r_1}\dots u_d^{r_d}}{r_1!\dots r_d!}.$$

7. Sei P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$, mit $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ offen, eine kanonische exponentielle Familie mit μ-Dichten $f_\vartheta(x) = c(\vartheta)\exp(\vartheta^\top T(x))$. Dann existiert für jedes $\vartheta \in \Theta$ die momenterzeugende Funktion M_T in einer Umgebung von 0. Es gilt

$$M_T(u) = \frac{c(\vartheta)}{c(\vartheta + u)}.$$

8. Berechnen Sie die Momente der Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ und der Exponentialverteilung E_a (mit der Dichte $f_a(x) = \exp(-x/a)/a$, $x > 0$).

Für $0 \le p_r \le 1$, $r = 1, \dots, s$, ist die *Multinomialverteilung* $M_{p_0,\dots,p_s,n}$ definiert durch

$$M_{p_0,\dots,p_s,n}(k_0, \dots, k_s) = \frac{n!}{k_0!\dots k_s!} p_0^{k_0}\dots p_s^{k_s}, \quad k_r = 0, 1, \dots, \quad \sum_{r=0}^{s} k_r = n.$$

9. Zeigen Sie, daß die Multinomialverteilungen $M_{p_0,\dots,p_s,n}$, $0 < p_r < 1$, $r = 1, \dots, s$, eine exponentielle Familie bilden, geben Sie eine kanonische Darstellung und bestimmen Sie den natürlichen Parameterraum.

10. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Werten in $\{0, \dots, s\}$. Sei $Y_r = |\{i : X_i = r\}|$. Dann ist $(Y_1, \dots, Y_s)$ multinomial verteilt mit $p_r = P(X_i = r)$.