Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang

Sommersemester 2006

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 5

21. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit positiver Dichte f_ϑ, sei $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ und sei S erwartungstreu für ϑ. Dann gilt

$$\operatorname{Var} S \geq \sup_{\tau \in \Theta} \frac{(\tau - \vartheta)^2}{\left(\int (f_\tau^2(x)/f_\vartheta(x))\, dx \right)^n - 1}.$$

22. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und verteilt nach einer Gleichverteilung auf $(0, \vartheta)$ mit $\vartheta > 0$. Bestimmen Sie einen gleichmäßig besten Test zum Niveau α für $\tau \leq \vartheta$ gegen $\tau \geq \vartheta$. Berechnen Sie die Gütefunktion.

23. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und nach einer Exponentialverteilung E_ϑ mit Skalenparameter $\vartheta > 0$ verteilt. Bestimmen Sie einen gleichmäßig besten Test zum Niveau α für $\tau \leq \vartheta$ gegen $\tau \geq \vartheta$.

24. Sei P_ϑ, $\vartheta \in \mathbb{R}$, die von einer Verteilung mit positiver Dichte erzeugte Lageparameter-Familie. Dann hat die Familie monotone Dichtequotienten in $T(x) = x$ genau dann, wenn $\log f$ konkav ist.

25. Sei Θ ein offenes Intervall und P_ϑ, $\vartheta \in \Theta$, eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathcal{B}$ mit μ-Dichten f_ϑ. Existiert $\partial_x \partial_\vartheta \log f_\vartheta(x)$, so hat die Familie monotone Dichtequotienten in $T(x) = x$ genau dann, wenn

$$\partial_x \partial_\vartheta \log f_\vartheta(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \vartheta \in \Theta.$$