Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2006**
Dipl.-Math. K. Tang

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 7

31. *(Schwarzsche Ungleichung.)* Zeigen Sie: Sind f und h Funktionen mit $Pf = Ph = 0$, $Pf^2 < \infty$ und $Ph^2 < \infty$, dann wird $P(f - ah)^2$ in $a \in \mathbb{R}$ minimiert durch $a^* = Pfh/Ph^2$. Verallgemeinern Sie das Ergebnis auf ein k-dimensionales f und m-dimensionales h.

32. *(Bekannter Variationskoeffizient.)* Sei $\mathcal{P}|\mathcal{B}$ eine Familie von Verteilungen P mit Mittelwert $\mu(P) > 0$, endlicher Varianz $\sigma^2(P)$ und bekanntem (positiven) *Variationskoeffizienten* $c(P) = \sigma(P)/\mu(P) = c$. Bestimmen Sie möglichst gute Schätzer für $\mu(P)$ und $\sigma^2(P)$.

33. *(Falsch spezifiziertes Modell.)* Sei f_ϑ, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$, eine parametrische Familie von μ-Dichten. Sei $\hat{\vartheta}_n$ der Maximum-Likelihood-Schätzer aufgrund von n unabhängigen und identisch verteilten Beobachtungen mit Verteilung P. Das Modell sei *falsch spezifiziert*, d.h. P hat keine Dichte in der parametrischen Familie. Diskutieren sie heuristisch, wie sich $\hat{\vartheta}_n$ asymptotisch verhält. Unter welchen Voraussetzungen gilt eine stochastische Entwicklung ähnlich wie im richtig spezifizierten Modell?

34. *(Parametrische lineare Einschränkung.)* Sei $\mathcal{P}|\mathcal{F}$ eine Familie von Verteilungen. Sei f eine k-dimensionale Zufallsvariable, und für $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ sei h_ϑ eine m-dimensionale Zufallsvariable. Jedes $P \in \mathcal{P}$ erfülle für ein (unbekanntes) $\vartheta \in \Theta$ die lineare Einschränkung $Ph_\vartheta = 0$. Bestimmen Sie heuristisch möglichst gute Schätzer für ϑ und Pf, und leiten Sie stochastische Entwicklungen für sie her.

35. *(Nichtlineare Regression.)* Sei X ein Zufallselement und Y eine Zufallsvariable mit $E(Y|X) = r_\vartheta(X)$ für $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$. Bestimmen Sie heuristisch einen möglichst guten Schätzer für ϑ.