Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang

Sommersemester 2006

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 10

46. Für $a < b < c$ ist die Dichte einer *Dreiecksverteilung* gegeben durch

$$f(x) = d(x-a)1(a < x < b) + e(c-x)1(b < x < c),$$

wobei d und e durch $d(b-a) = e(c-b) = 2/(c-a)$ gegeben sind. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit Dichte f. Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung von $X_{1:n}$ und $X_{n:n}$.

47. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und Cauchy-verteilt mit Skalenparameter a. Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung von $X_{1:n}$ und $X_{n:n}$.

48. Seien $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. mit endlcher Varianz. Sei $\hat{\mu} = (1/n)\sum_{i=1}^n X_i$ das Stichprobenmittel und $\hat{\sigma}^2 = (1/n)\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$ die Stichprobenvarianz. Sei c das $(1-\alpha/2)$-Quantil der Standard-Normalverteilung. Dann ist $B = (\hat{\mu} - n^{-1/2}c\hat{\sigma}, \hat{\mu} + n^{-1/2}c\hat{\sigma})$ ein Konfidenzintervall für $\mu = EX$ zum asymptotischen Niveau $1-\alpha$, das heißt $P(\mu \in B) \to 1-\alpha$.

49. Es seien die Voraussetzungen von Aufgabe 48 erfüllt. Bestimmen Sie einen (zweidimensionalen) Konfidenzbereich für $(\mu, \sigma^2) = (EX, E(X-EX)^2)$ zum asymptotischen Niveau $1-\alpha$.

50. Hat das Wahrscheinlichkeitsmaß mit Verteilungsfunktion F ein endliches Moment der Ordnung $2+\varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$, so ist $(1-F^{1/2})F^{1/2}$ Lebesgue-integrierbar.