Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang **Sommersemester 2006**

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 11

Seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, i.i.d. mit Verteilungsfunktion F. Sei $g(X_1, \dots, X_m)$ integrierbar und symmetrisch in den Argumenten. Die zu $X_1, \dots, X_n$ mit $n \geq m$ gehörige *U-Statistik* ist

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n} g(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}).$$

51. Es gilt $U_n = E(g(X_1, \dots, X_m) | X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$.

52. Die Folge U_n, $n \geq m$, ist ein Rückwärtsmartingal.

53. Setze $\vartheta(F) = Eg(X_1, \dots, X_m)$. Sei $m \geq n$ und $S(X_1, \dots, X_n)$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\vartheta(F)$. Die Symmetrisierung von $S_n(X_1, \dots, X_n)$ ist die U-Statistik

$$U_n = \frac{1}{n!} \sum S_n(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}),$$

wobei sich die Summe über alle Permutationen von $(1, \dots, n)$ erstreckt. Zeigen Sie: $\operatorname{Var} U_n \leq \operatorname{Var} S_n$.

54. Setze $g_j(x_1, \dots, x_j) = E(x_1, \dots, x_j, X_{j+1}, \dots, X_m)$, $j = 1, \dots, m-1$, und $g_m = g$. Dann gilt

$$g_j(x_s, \dots, x_j) = E(g(X_1, \dots, X_m) | X_1 = x_1, \dots, X_j = x_j),$$
$$g_j(x_1, \dots, x_j) = Eg_{j+1}(x_1, \dots, x_j, X_{j+1}).$$

55. Setze $\bar{g} = g - \vartheta(F)$ und $\bar{g}_j = g_j - \vartheta(F)$. Definiere

$$\begin{aligned}
h_1(x_1) &= \bar{g}_1(x_1),\\
h_2(x_1, x_2) &= \bar{g}_2(x_1, x_2) - h_1(x_1) - h_1(x_2),\\
h_3(x_1, x_2, x_3) &= \bar{g}_3(x_1, x_2, x_3) - \sum_{i=1}^{3} h_1(x_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 3} h_2(x_{i_1}, x_{i_2}),\\
&\dots\\
h_m(x_1, \dots, x_m) &= \bar{g}_m(x_1, \dots, x_m) - \sum_{i=1}^{m} h_1(x_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} h_2(x_{i_1}, x_{i_2})\\
&\quad - \dots - \sum_{1 \le i_1 < \dots i_{m-1} \le m} h_{m-1}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-1}}).
\end{aligned}$$

Definiere die zugehörigen (zentrierten) U-Statistiken

$$U_{jn} = \sum_{1 \le i_1 < \dots i_j \le n} h_j(X_{i_1}, \dots, X_{i_j}).$$

Dann gilt

$$U_n - \vartheta(F) = \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} \binom{n}{j}^{-1} U_{jn}.$$