

Übungen zur Statistik für Zeitreihen  
Serie 13

Bezeichne  $J_X(u) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n X_j e^{-ij u}$  die diskrete Fourier-Transformierte von  $X_1, \dots, X_n$ .

61. Es gilt

$$X_k = \frac{1}{2\pi} n^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} J_X(u) e^{iku} du.$$

62. Sei  $Z_j = X_j Y_j$  für  $j = 1, \dots, n$ . Dann gilt

$$J_Z(\omega_r) = n^{-1/2} \sum_{s \in F_n} J_X(\omega_s) J_Y(\omega_{r-s}).$$

63. Für den AR(1)-Prozeß  $X_t = \vartheta X_{t-1} + \varepsilon_t$  gilt unter geeigneten Voraussetzungen  $\gamma(1) = \vartheta \gamma(0)$ . Wir können also  $\gamma(1)$  durch  $\hat{\gamma}(1)$  und durch  $\hat{\vartheta} \hat{\gamma}(0)$  schätzen. Vergleichen Sie diese beiden Schätzer, wenn  $\hat{\vartheta}$  der Kleinste-Quadrate-Schätzer oder ein beliebiger asymptotisch linearer Schätzer ist. Berechnen Sie die asymptotischen Varianzen.

64. Geben Sie zwei Schätzer des Prädiktors  $E(X_{n+m}|X_n)$  für den AR(1)-Prozeß an.

65. Behandeln Sie die beiden vorhergehenden Aufgaben für AR(2) oder AR( $p$ ) statt AR(1).