Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. K. Tang

Wintersemester 2006/2007

Übungen zur Statistik für Zeitreihen
Serie 14

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit Dichte f. Für beschränktes u mit $Eu(X) = 0$ setze $f_{nu}(x) = f(x)(1 + n^{-1/2}u(x))$. Seien P_n und P_{nu} die Verteilungen von $(X_1, \ldots, X_n)$ unter f und f_{nu}.

66. Es gilt

$$\log \frac{dP_{nu}}{dP_n} = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n u(X_i) - \frac{1}{2}\|u\|_f^2 + o_p(1).$$

67. Für $k \in L_2^r(f)$ ist der empirische Schätzer $(1/n)\sum_{i=1}^n k(X_i)$ effizient für $Ek(X)$.

68. Es gelte $Eh(X) = 0$ für ein $h \in L_2^m(f)$. Bestimmen Sie unter dieser Nebenbedingung einen effizienten Schätzer für $Ek(X)$ mit $k \in L_2^r(f)$.

69. Es gelte $Ek^2(X_1, \ldots, X_m) < \infty$. Dann ist die von-Mises-Statistik

$$\frac{1}{n^m} \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^n k(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})$$

asymptotisch linear und effizient für $Ek(X_1, \ldots, X_m)$.

70. Sei $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den kanonischen Gradienten von $f * f(x)$. Sei $\hat{f}(y) = (1/n)\sum_{i=1}^n k_b(X_i)$ ein Kernschätzer für $f(y)$ mit $k_b(y) = k(y/b)/b$. Zeigen Sie (heuristisch), daß $\hat{f} * \hat{f}(x)$ asymptotisch linear und effizient für $f * f(x)$ ist, wenn $b = o(n^{-1/4})$ gilt.