Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2007/2008**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Einführung in die Stochastik
Serie 3
Abgabe: Montag, 5.November 2007, vor der Vorlesung

11. In einer Urne sind 99 schwarze und eine weiße Kugel. Zwei Personen ziehen abwechselnd ohne Zurücklegen eine Kugel. Wer als erster die weiße Kugel zieht, hat gewonnen. Möchten Sie lieber als erster oder zweiter ziehen?

12. a) Zeigen Sie:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$
Hinweis: Auf wie viele Arten können aus n weißen und n schwarzen Objekten n Objekte ausgewählt werden?
b) Beweisen Sie die Formel für die *Vandermonde-Konvolution*:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{i-k} = \binom{m+n}{i}.$$

13. Gegeben seien n Elementarteilchen, die sich zu einem Zeitpunkt in N verschiedenen Zuständen (diskrete Energieniveaus, Spin o.ä.) befinden können. Dabei dürfen mehrere Teilchen im gleichen Zustand vorliegen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau n_1 Teilchen in Zustand 1, n_2 Teilchen in Zustand 2, ... und n_N Teilchen in Zustand N befinden.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_k, dass genau k Teilchen in einem vorgegebenen Zustand vorliegen.

c) Zeigen Sie, dass für $N \to \infty$, $n \to \infty$ und $\frac{n}{N} \to \lambda > 0$ gilt
$$p_k \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

14. Es werden k Kugeln auf N Fächer verteilt. Dabei darf jedes Fach auch mehrere Kugeln enthalten. Wie wahrscheinlich ist es, dass mindestens ein Fach leer bleibt? Folgern Sie daraus, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich in jedem Fach mindestens eine Kugel befindet.

15. Ein gut gemischtes Skatspiel wird so an drei Spieler A, B und C verteilt, dass jeder Spieler zehn Karten erhält. Zwei Karten werden als sogenannter Skat abgelegt.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein beliebiger Spieler alle vier Asse bekommt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Spieler A genau drei Asse auf der Hand?