

Übungen zur Einführung in die Stochastik
Serie 9

Abgabe: Montag, 17. Dezember 2007, vor der Vorlesung

41. Seien X_1, X_2, \dots unabhängig und gleichverteilt auf $(0, \vartheta)$ mit $\vartheta > 0$. Definiere $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Dann gilt:

- a) M_n ist konsistent für $t(P) = \vartheta$.
- b) $n(\vartheta - M_n)$ konvergiert schwach gegen eine Zufallsvariable Z . Welche Verteilung hat sie?

42. Sei X die Anzahl der Unfälle in einer bestimmten Stadt in einer Woche. Wir betrachten X als Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Wir wollen aus der Beobachtung von X die Wahrscheinlichkeit schätzen, dass in den folgenden drei Wochen kein Unfall geschieht, also $t(P) = (P(X = 0))^3$. Zeigen Sie: Ist T erwartungstreuer Schätzer, so liefert T unsinnige Schätzwerte.

43. Seien $(X_i, Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängige und identisch verteilte zweidimensionale Zufallsvektoren mit endlichen vierten Momenten $E(X_1^4)$, $E(Y_1^4)$. Dann ist

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

ein konsistenter Schätzer für die Kovarianz von X und Y . Bestimmen Sie außerdem seine Einflussfunktion und seine asymptotische Varianz.

44. Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängige und identisch verteilt mit Dichte f und Verteilungsfunktion F . Die empirische Verteilungsfunktion \hat{F}_n ist definiert durch:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(X_i \leq x)}.$$

Sei f stetig in x . Zeigen Sie, dass der geschätzte Differenzenquotient

$$\hat{f}_n(x) = \frac{\hat{F}_n(x + b_n) - \hat{F}_n(x - b_n)}{2b_n}$$

ein konsistenter Schätzer für $f(x)$ ist, wenn $b_n \rightarrow 0$ und $nb_n \rightarrow \infty$.

45. Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit einer Dichte f , die in x differenzierbar ist. Finden Sie einen konsistenten Schätzer für die Ableitung $f'(x)$.

Einladung: Die Fachschaft lädt zur Nikolausparty am 14.12. im Seminarraum 2 des Mathematischen Instituts ein. Beginn ist um 20 Uhr. Wie immer gibt es leckeres Kölsch und Glühwein gegen die Kälte.