Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz

Sommersemester 2008

Übungen zur Stochastik I
Serie 1

Abgabe: Dienstag, 15. April 2008, vor der Vorlesung

1. Berechnen Sie $\liminf_{n\to\infty} 1_{A_n}$ und $\limsup_{n\to\infty} 1_{A_n}$.

2. (5 Punkte) a) Berechnen Sie $(\liminf A_n)^c$ und $(\limsup A_n)^c$.
b) Zeigen Sie, dass gilt $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
c) Wenn $A_n \uparrow A$ oder $A_n \downarrow A$, dann gilt $\liminf A_n = \limsup A_n = A$.
d) Sei $A_n = (-1/n, 1]$ für ungerades n und $A_n = (-1, 1/n]$ für gerades n. Berechnen Sie $\liminf A_n$ und $\limsup A_n$.
e) Sei A_n das Innere der offenen Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt $((-1)^n, 0)$. Berechnen Sie $\liminf A_n$ und $\limsup A_n$.

3. Bestimmen Sie $\sigma(\{A\})$ und $\sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$ für $A, A_1, \dots, A_n \subset \Omega$.

4. (3 Punkte) Beweisen Sie, dass eine Algebra abgeschlossen unter Differenzen und symmetrischen Differenzen ist.

5. Sei μ eine nichtnegative und additive Mengenfunktion auf einer Algebra $\mathcal{F}$. Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ disjunkt mit $\sum_n A_n \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\mu \sum_n A_n \geq \sum_n \mu A_n$$

.