Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2008**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Stochastik I
Serie 2
Abgabe: Dienstag, 22. April 2008, vor der Vorlesung

6. Seien Ω abzählbar unendlich und $\mathcal{F}$ die Menge aller Teilmengen von Ω. Definiere $\mu A = 0$ für A endlich und $\mu A = \infty$ sonst.

a) Die Mengenfunktion μ ist additiv, aber nicht σ-additiv.

b) Der Grundraum Ω ist Limes einer aufsteigenden Folge von Mengen A_n mit $\mu A_n = 0$.

7. Die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Borel-messbar.
Bemerkung: Wenn wir das System der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{O}$ bezeichnen, dann gilt sogar $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}$.

8. Seien Ω abzählbar und $\mathcal{F}$ die Menge aller Teilmengen von Ω, die endlich sind oder endliches Komplement haben.

a) Das Mengensystem $\mathcal{F}$ ist eine Algebra, aber keine σ-Algebra.

b) Definiere $\mu A = 0$ für A endlich und $\mu A = 1$ sonst. Die Mengenfunktion μ ist additiv, aber nicht σ-additiv.

9. Seien Ω beliebig und $\mathcal{F}$ die Menge aller Teilmengen von Ω. Definiere $\mu A = \#\{\omega : \omega \in A\}$ für $A \subset \Omega$.

a) Die Mengenfunktion μ ist ein Maß, das *Zählmaß*.

b) Ist Ω unendlich, so gibt es eine Folge von Mengen $A_n \downarrow \emptyset$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \mu A_n \neq 0.$$

10. Sei μ ein endliches Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ mit $A_n \to A$. Dann gilt

$$\mu A_n \to \mu A.$$