Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2008**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Stochastik I
Serie 5
Abgabe: Dienstag, 20. Mai 2008, vor der Vorlesung

21. Sei f integrierbar bezüglich eines Maßes μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Definiere ν durch $\nu A = \mu(1_A f)$, $A \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\nu^+ A = \mu(1_A f^+), \quad \nu^- A = \mu(1_A f^-).$$

22. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Sei weiterhin $f : \Omega \to [0, \infty)$ eine messbare Funktion. Definiere ν als das Maß mit μ-Dichte f.

a) Beweisen Sie, dass für jede messbare Funktion $\varphi : \Omega \to [0, \infty)$ gilt

$$\nu\varphi = \mu(\varphi f).$$

b) Zeigen Sie: Eine messbare Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann ν-integrierbar, wenn φf μ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt wie in a)

$$\nu\varphi = \mu(\varphi f).$$

c) Seien nun zusätzlich $g : \Omega \to [0, \infty)$ eine messbare Funktion und ϱ das Maß mit ν-Dichte g. Zeigen Sie, dass dann ϱ die μ-Dichte gf besitzt.

23. Auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ seien μ und ν zwei Maße mit $\nu \leq \mu$; ferner sei μ σ-endlich. Beweisen Sie, dass ν eine μ-Dichte f mit Werten $0 \leq f \leq 1$ besitzt.

24. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. $\mathcal{F}$ enthalte die Einpunktmengen. Seien μ und ν diskrete Maße auf $\mathcal{F}$.

a) Sind μ und ν immer σ-endlich?

b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\nu \ll \mu$ an.

c) Berechnen Sie alle μ-Dichten von ν.

Hinweis: Ein Maß μ heißt *diskret*, wenn es höchstens abzählbar viele $\omega_i \in \Omega$ und $p_i \in [0, \infty)$ gibt, so dass

$$\mu A = \sum_{\omega_i \in A} p_i \quad \text{für } A \in \mathcal{F}.$$

25. Seien μ und ν stetige Maße auf der Borel-Algebra $\mathcal{B}^n$ des $\mathbb{R}^n$.
a) Sind μ und ν immer σ-endlich?
b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\nu \ll \mu$ an.
c) Berechnen Sie alle μ-Dichten von ν.

Hinweis: Ein Maß μ heißt *stetig* mit *Dichte* a, wenn $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-messbar ist mit

$$\mu A = \lambda^n(1_A a) \quad \text{für } A \in \mathcal{B}^n.$$