

Übungen zur Stochastik I
Serie 6

Abgabe: Dienstag, 27. Mai 2008, vor der Vorlesung

26. Gegeben seien messbare Räume $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 0, \dots, n$, und eine Funktion $f : \Omega_0 \rightarrow \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$. Die Abbildung $\pi_i : \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \rightarrow \Omega_i$ sei die Projektion auf die i -te Komponente.

a) Zeigen Sie, dass gilt $\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n = \sigma(\bigcup_{i=1}^n \pi_i^{-1}(\mathcal{F}_i))$.

b) Beweisen Sie, dass die Abbildung f genau dann \mathcal{F}_0 - $\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n$ -messbar ist, wenn jede der Abbildungen $\pi_i \circ f$ \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_i -messbar ist.

27. Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum und $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare, nichtnegative reelle Funktion. Dann gilt:

$$\int f d\mu = \int 1_{[0, \infty)}(t) \mu(\{f \geq t\}) \lambda^1(dt).$$

Hinweise: 1. Die Aussage von Korollar 8.4 ist symmetrisch in μ_1 und μ_2 , d.h. es gilt ebenfalls

$$\mu f = \iint f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1) \mu_2(d\omega_2).$$

2. Man kann Korollar 8.4 auch für eine nichtnegative messbare Funktion f formulieren. Den sich ergebenden Satz bezeichnet man auch als „Satz von Tonelli“.

3. Beachten Sie den Hinweis zu Aufgabe 29.

28. a) Seien $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mu_1 = \mu_2$ das aus Aufgabe 9 bekannte Zählmaß. Ferner sei die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch $f(n, n) = n$ und $f(n, n+1) = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f(i, j) = 0$, falls $j \neq i$ und $j \neq i+1$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y) \mu_2(dy) \mu_1(dx) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y) \mu_1(dx) \mu_2(dy) = \infty.$$

Warum ist der Satz von Fubini (Korollar 8.4) nicht anwendbar?

b) Seien $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{B}$, $\mu_1 = \lambda^1$ und μ_2 das Zählmaß aus

Aufgabe 9. Ferner sei $A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : \omega_1 = \omega_2\} \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. Dann gilt

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} 1_A(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1) = \infty \quad \text{und}$$
$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} 1_A(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1) \mu_2(d\omega_2) = 0.$$

Warum ist der Satz von Fubini (Korollar 8.4) nicht anwendbar?

Hinweis: Beachten Sie die Hinweise 1 und 2 zu Aufgabe 27. In b) ist anzugeben, warum Korollar 8.4 in der Version für eine nichtnegative messbare Funktion f nicht angewendet werden kann.

29. (5 Punkte) Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sind in $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$:

- a) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n < a\}$,
- b) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < a\}$,
- c) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ existiert und ist endlich}\}$,
- d) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq a\}$,
- e) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^n x_k = 0 \text{ für mindestens ein } n \in \mathbb{N}\}$.

Hinweis: Abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{R}^n sind in \mathcal{B}^n .

30. (3 Punkte) Ist X integrierbar und $PA_n \rightarrow 0$, so gilt $E1_{A_n} X \rightarrow 0$.