Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Sommersemester 2008**

Übungen zur Stochastik I
Serie 9
Abgabe: **Montag, 16. Juni 2008**, vor der Vorlesung

41. (5 Punkte) Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen für
a) das Dirac-Maß ε_a,
b) das Maß $\frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_{-a})$,
c) die Bernoulli-Verteilung $B_{1,p}$,
d) die geometrische Verteilung G_p ,
e) die Poisson-Verteilung P_λ,
f) die Gleichverteilung über einem symmetrischen Intervall $(-a, a)$.

42. (3 Punkte) (*Eigenschaften charakteristischer Funktionen*)
Sei φ die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P. Zeigen Sie:
a) Es gilt $|\varphi(t)| \leq 1 = \varphi(0)$.
b) Die charakteristische Funktion φ ist gleichmäßig stetig.
c) Es gilt $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$.

43. (*Vertauschung von Differentiation und Integration*)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, I ein offenes Intervall, $t \in I$ und $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:
a) Für $s \in I$ ist $f(s, \cdot) : \omega \mapsto f(s, \omega)$ integrierbar.
b) Für $\omega \in \Omega$ ist $f(\cdot, \omega) : t \mapsto f(t, \omega)$ auf ganz I differenzierbar mit Ableitung $f'(\cdot, \omega)$.
c) Es existiert eine μ-integrierbare Funktion $g \geq 0$ auf Ω, so dass für alle $\omega \in \Omega$ und $s \neq t$ gilt

$$\left| \frac{f(s,\omega) - f(t,\omega)}{s - t} \right| \leq g(\omega).$$

Dann ist die Funktion $\psi(t) := \int f(t, \omega)\mu(d\omega)$ differenzierbar mit Ableitung

$$\psi'(t) = \int f'(t,\omega)\mu(d\omega).$$

44. (*Momente als Ableitungen der charakteristischen Funktion*)
Für $X \in L_n$ ist die charakteristische Funktion φ^X n-mal differenzierbar mit $\frac{d^n\varphi^X}{dt^n}(t) = i^n E(X^n e^{itX})$. Insbesondere gilt $\frac{d^n\varphi^X}{dt^n}(0) = i^n E(X^n)$.
Hinweis: Für $1 < q < p$ gilt $L_p \subset L_q$.

45. Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, jeweils C_a-verteilter Zufallsvariablen mit der Dichte

$$f_a(x) = \frac{1}{a\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche γ konvergiert

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^\gamma}$$

in Verteilung?

b) Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz jeweils die Grenzverteilung.