Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2008**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Stochastik I
Serie 10
Abgabe: Dienstag, 24. Juni 2008, vor der Vorlesung

46. Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, P_λ-verteilter Zufallsvariablen. Der Parameter λ sei unbekannt, und $P(X_i = 0) = e^{-\lambda}$ soll mittels $X_1, \dots, X_n$ geschätzt werden. Die beiden Schätzer

$$\hat{T}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i=0\}} \qquad \text{und}$$
$$\hat{T}_2 = \exp\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

werden dafür ins Auge gefasst. Bestimmen Sie die Grenzverteilungen von

$$\sqrt{n}(\hat{T}_j - e^{-\lambda}), \qquad j = 1, 2,$$

für $n \to \infty$.
Hinweis: Für eine P_λ-verteilte Zufallsvariable X gilt $EX = \lambda = Var(X)$.

47. Für ein gegebenes W-Maß μ auf $\mathcal{B}^1$ betrachte man auf $\mathcal{B}^n$ das W-Maß $P = \mu \otimes \ldots \otimes \mu$ (mit n Faktoren). Es bezeichne $\mathcal{G}$ das System aller Mengen $B \in \mathcal{B}^n$ mit der Eigenschaft, dass für jede Permutation $i_1, \dots, i_n$ von $1, \dots, n$ mit jedem Punkt $x = (x_1, \dots, x_n)$ aus B auch $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ in B liegt. Man zeige:

a) $\mathcal{G}$ ist eine Sub-σ-Algebra von $\mathcal{B}^n$.

b) Für jede integrierbare Zufallsvariable X auf dem W-Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P)$ stimmt $E(X|\mathcal{G})$ fast sicher mit der Funktion

$$x \mapsto \frac{1}{n!}\sum_{i_1,\dots,i_n} X(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$$

überein. Die Summation erstreckt sich dabei über alle Permutationen von $1, \dots, n$.

48. Sei $P|\mathcal{B}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Lebesgue-Dichte f und X eine integrierbare Zufallsvariable auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Ferner sei $\mathcal{B}_0$ die Sub-σ-Algebra, die von den um 0 symmetrischen Intervallen erzeugt wird. Berechnen Sie $E(X|\mathcal{B}_0)$.

49. Gegeben sei der W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Für ein $A \in \mathcal{F}$ setzen wir $P(A|Y=y) = E(1_A|Y=y)$. Seien weiter X und Y Zufallsvariablen mit stetiger gemeinsamer Lebesgue-Dichte f, d.h. $P^{(X,Y)}$ besitze die Lebesgue-Dichte f. Zudem sei X P-integrierbar und es gelte

$$f_2(y) = \int f(x,y)\lambda^1(dx) > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie:

a) $E(X|Y=y) = \frac{1}{f_2(y)} \int x f(x,y)\lambda^1(dx)$ für P^Y-fast alle y,

b) $P(X \leq t|Y=y) = \frac{1}{f_2(y)} \int_{(-\infty,t]} f(x,y)\lambda^1(dx)$ für P^Y-fast alle y.

Bemerkung: Die Funktion

$$P(X \leq t|Y=y) = \frac{1}{f_2(y)} \int_{(-\infty,t]} f(x,y)\lambda^1(dx),\ t \in \mathbb{R},$$

wird *bedingte Verteilungsfunktion von* X *gegeben* $Y=y$ genannt. Die Funktion

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)},\ x \in \mathbb{R},$$

heißt *bedingte Dichte von* X *gegeben* $Y=y$.

50. a) Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Gegeben $X=x$ besitze Y die bedingte Dichte $h(\cdot|x)$. Zeigen Sie

$$P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x)h(y|x)}{\sum_{x'} P(X=x')h(y|x')}.$$

b) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f. Gegeben $X=x$ sei Y diskret verteilt mit $P(Y=y|X=x) = p(y|x)$. Zeigen Sie, dass dann

$$h(x|y) = \frac{f(x)p(y|x)}{p(y)}$$

mit $p(y) = P(Y=y) = \int f(x)p(y|x)\lambda^1(dx)$ eine bedingte Dichte von X gegeben Y ist.

Mitteilung: Die Klausur zur Stochastik I findet am Montag, 14. Juli, zwischen 13.45 Uhr und 15.45 Uhr im Hörsaal des Mathematischen Institut statt. Die Vorlesung fällt dadurch an diesem Tag aus.