Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2008**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Stochastik I
Serie 12
Abgabe: Dienstag, 8. Juli 2008, vor der Vorlesung

56. **(3 Punkte)** Ist $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal und c eine Konstante, so ist $(\max\{X_n, c\}, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls ein Submartingal.

57. Seien $X_1, X_2, \dots$ und $Y_1, Y_2, \dots$ Zufallsvariablen, und habe $(X_1, \dots, X_n)$ eine positive Dichte f_n und $(Y_1, \dots, Y_n)$ eine Dichte g_n für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\big(g_n(X_1, \dots, X_n)/f_n(X_1, \dots, X_n), \mathcal{F}(X_1, \dots, X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal.

58. **(5 Punkte)** (*Eigenschaften von Stoppzeiten*)
a) Sind S und T Stoppzeiten, dann auch $S \vee T$, $S \wedge T$ und $S + T$.
b) Eine Stoppzeit T ist $\mathcal{F}_T$-messbar.
c) Ist T eine Stoppzeit und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, so ist X_T $\mathcal{F}_T$-messbar.
d) Sind S und T Stoppzeiten mit $S \leq T$, dann gilt $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
Hinweis: $x \vee y := \max\{x, y\}$, $x \wedge y := \min\{x, y\}$.

59. Ursprünglich bedeutet „Martingal" folgende Strategie (auch Petersburger Strategie genannt): Sie verdoppeln bei jedem Spiel den Einsatz und hören auf, wenn Sie das erste Mal gewinnen. – Für ein faires Spiel gilt:
a) Am Schluss haben Sie Ihren Einsatz verdoppelt. (Der Satz über optional sampling gilt also *nicht.*)
b) Ihr Vermögen ist ein Martingal.
c) Die Stoppzeit ist geometrisch verteilt.
d) Der Erwartungswert Ihres Einsatzes bis zum letzten Spiel ist *unendlich.* (Sie benötigen also ein hohes Startkapital.)

60. (*Optional switching*) Seien $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Martingale und T eine Stoppzeit, und es gelte $X_T = Y_T$, wenn $T < \infty$. Definiere

$$Z_n = \begin{cases} X_n & , n < T \\ Y_n & , n \geq T. \end{cases}$$

(*Interpretation:* Zum Zeitpunkt T setzen Sie sich mit Ihren bisher gewonnenen Chips an einen anderen Spieltisch.) Dann ist $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal.