Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2008/2009**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Stochastik II
Serie 2
Abgabe: Dienstag, 28. Oktober 2008, vor der Vorlesung

6. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Werten in $[0,1]$ und $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1,\ldots,X_n)$. Gilt

$$P\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\middle|\mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n \text{ und } P\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}\middle|\mathcal{F}_n\right) = X_n,$$

dann ist $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal. Zeigen Sie ferner, dass X_n fast sicher und in L_2 konvergiert.

7. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in Aufgabe 6 und $Z = \lim_{n\to\infty} X_n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $E((X_{n+1}-X_n)^2) = \frac{1}{4}E(X_n(1-X_n))$.

(ii) $E(Z(1-Z)) = 0$ und Z ist Bernoulli-verteilt.

8. Es sei $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal, welches zu einem Submartingal $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ fortgesetzt werden kann. Zeigen Sie, dass dann $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher konvergiert und $X_\infty \geq \lim_{n\to\infty} X_n$ fast sicher gilt.
Hinweis: Betrachten Sie das Submartingal (?) $(Y_n,\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $Y_n := X_n - E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ und die Folge $(E(X_\infty|\mathcal{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

9. Es seien $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, Y_n, $n\in-\mathbb{N}$, und $Y_{-\infty}$ Zufallsvariablen mit $Y_n \xrightarrow{n\to-\infty} Y_{-\infty}$ f.s., und es gebe eine Zufallsvariable Z mit $EZ<\infty$ und $|Y_n|\leq Z$ f.s. für alle $n\in-\mathbb{N}$. $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}$, $n\in-\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$, seien σ-Algebren mit $\mathcal{F}_n\downarrow\mathcal{F}_{-\infty}$. Zeigen Sie, dass dann

$$E(Y_n|\mathcal{F}_n) \xrightarrow{n\to-\infty} E(Y_{-\infty}|\mathcal{F}_{-\infty}) \quad \text{f.s.}$$

gilt.

10. a) Seien $X_1,\ldots,X_n\in L_2(P)$ vertauschbar. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{Cov}(X_1,X_2)\geq -\frac{1}{n-1}\operatorname{Var}(X_1)$ gilt.

b) Seien $X_1, \ldots, X_n \in L_2(P)$ vertauschbar. Zeigen Sie: $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) \geq 0$.
c) Eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *bedingt u.i.v. gegeben* $\mathcal{G}$, falls

$$P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n | \mathcal{G}) = \prod_{m=1}^{n} P(X_1 \leq x_m | \mathcal{G})$$

gilt. Beweisen Sie: Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bedingt u.i.v. gegeben $\mathcal{G}$, so ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vertauschbar.