Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Wintersemester 2008/2009**

Übungen zur Stochastik II
Serie 3

Abgabe: Dienstag, 4. November 2008, vor der Vorlesung

11. Seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $EX_n = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \le i < j \le n} (X_i - X_j)^2 \longrightarrow 2\sigma^2$$

gilt.

12. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\{0,1\}$-wertiger, vertauschbarer Zufallsvariablen. Folgern Sie direkt aus der Definition der Vertauschbarkeit, dass

$$P(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1 | S_n = m) = \frac{\binom{n-k}{n-m}}{\binom{n}{m}}$$

gilt ($k \le m \le n, S_n := \sum_{j=1}^n X_j$).

13. Seien $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(Y_n = a_n) = P(Y_n = -a_n) = \frac{1}{2}$. Zeigen Sie: $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=1}^\infty Y_n$ fast sicher konvergiert.

14. Zeigen Sie:

a) Die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{B}^{[0,\infty)}$ auf $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ besteht aus den messbaren Zylindern mit abzählbarer Basis.

b) Die Menge der stetigen Pfade $\omega = (\omega(t))_{t\ge0}$ in $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ ist nicht Borel-messbar.

15. Sei q_t die Dichte der Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz t. Definiere

$$P_{t_1,\dots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \int_{A_1} q_{t_1}(x_1)dx_1 \int_{A_2} q_{t_2-t_1}(x_2 - x_1)dx_2 \cdots \int_{A_n} q_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})dx_n.$$

Zeigen Sie:

a) Diese Familie ist projektiv.

b) Die Fortsetzung auf $\mathcal{B}^{[0,\infty)}$ hat unabhängige Zuwächse.