Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Wintersemester 2008/2009**

Übungen zur Stochastik II
Serie 4
Abgabe: Dienstag, 11. November 2008, vor der Vorlesung

16. (3 Punkte) a) Sei X N_{μ,σ^2}-verteilt, Y unabhängig von X und $X+Y$ N_{ν,τ^2}-verteilt mit $\tau^2 > \sigma^2$. Dann ist Y $N_{\nu-\mu,\tau^2-\sigma^2}$-verteilt.
b) Sei X_t $N_{0,t}$-verteilt. Dann gilt $E|X_t|^a = t^{a/2}E|X_1|^a$.

17. *(Transformationssatz für Dichten)* Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $T : U \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und invertierbar. Ferner sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte f und $PU = 1$. Zeigen Sie, dass P^T die Dichte

$$f^T(y) = \begin{cases} \frac{1}{|J(T^{-1}(y))|} f(T^{-1}(y)) & \text{, falls } y \in T(U) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

hat.
Hinweis: Benutzen Sie folgende Aussage zur *Variablentransformation*: Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $T : U \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und invertierbar. Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nichtnegativ und messbar. Ist $A \subset T(U)$ messbar, so gilt

$$\int_A f(x)dx = \int_{T^{-1}(A)} |J(x)| f(T(x))dx,$$

wobei $J(x)$ die Jacobi-Determinante von T in x ist.

18. Die *d-dimensionale Normalverteilung* $N(\mu,\Sigma)$ mit Mittelwert μ und Kovarianzmatrix Σ hat die Dichte

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2}|\det\Sigma|^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top\Sigma^{-1}(x-\mu)}.$$

a) Ist X verteilt nach $N(\mu,\Sigma)$ und A eine invertierbare $d\times d$-Matrix, wie ist dann AX verteilt?

b) Sei $X^\top = (Y_1^\top, Y_2^\top)$ verteilt nach $N(\underline{0},\Sigma)$. Ist

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

so gilt $\Sigma_{ij} = EY_iY_j^\top$. Setzen wir $Z_1 = Y_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}Y_2$, dann ist $(Z_1^\top, Y_2^\top)^\top$ normalverteilt. Außerdem sind Z_1 und Y_2 unabhängig.

c) Sei $(Y_1^\top, Y_2^\top)^\top$ wie oben. Was ist die bedingte Verteilung von Y_1 gegeben Y_2?

19. Ist B eine eindimensionale Brownsche Bewegung, so heißt $B_t - tB_1$, $0 \leq t \leq 1$, eine Brownsche Brücke.
a) Berechnen Sie die Kovarianzfunktion der Brownschen Brücke.
b) Zeigen Sie, dass die Brownsche Brücke wie B_t, $0 \leq t \leq 1$ bedingt nach $B_1 = 0$ verteilt ist.
Hinweis: Es genügt, die endlich-dimensionalen Randverteilungen zu betrachten.

20. (5 Punkte) Sei $W = (W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung und $B = (B_t)_{t\in[0,1]}$ eine Brownsche Brücke. Zeigen Sie:

a) $(tW_{\frac{1}{t}})_{t\in[0,\infty)}$ ist ebenfalls eine Brownsche Bewegung.

b) $((1-t)W_{\frac{t}{1-t}})_{t\in[0,1]}$ ist eine Brownsche Brücke.

c) $((1+t)B_{\frac{1}{1+t}})_{t\in[0,\infty)}$ ist eine Brownsche Bewegung.

Setze dabei $0 \cdot W_{\frac{1}{0}} := 0$.