Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz
Wintersemester 2008/2009

Übungen zur Stochastik II
Serie 6
Abgabe: Dienstag, 25. November 2008, vor der Vorlesung

26. Sei $(N_t)_{t>0}$ ein wie in Aufgabe 25 definierter Poisson-Prozess mit Intensität a.
a) Nach Aufgabe 25b) ist N_t P_{at}-verteilt für alle $t > 0$. Nach Aufgabe 25g) besitzt der Poisson-Prozess unabhängige Zuwächse. Folgern Sie alleine mit diesem Wissen, dass $N_t - N_s$ $P_{a(t-s)}$-verteilt ist.
b) Zeigen Sie, dass $(N_t - at)_{t>0}$ ein Martingal bezüglich der kanonischen Filtration $(\mathcal{F}(N_s, s \leq t))_{t>0}$ ist.

27. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger reellwertiger Prozess mit $X_0 = 0$. Ferner sei für alle reellen u der Prozess $(\exp(iuX_t + \frac{1}{2}u^2 t))_{t\geq 0}$ ein Martingal bezüglich der kanonischen Filtration $\mathcal{F}(X_s, s \leq t)$. Dann ist $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

28. Eine Funktion $A : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt *Hölder der Ordnung* a auf dem Intervall I, wenn

$$\sup_{s,t\in I, s\neq t} \frac{|A(s) - A(t)|}{|s - t|^a} < \infty.$$

Zeigen Sie: Die Brownschen Pfade sind f.s. auf allen Intervallen nicht Hölder der Ordnung $a > \frac{1}{2}$.

29. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette, und die Übergangsverteilung von X_n nach X_{n+1} sei $Q_{n+1}(X_n, dx)$. Ferner sei T eine (diskrete) Stoppzeit (auf $\mathbb{N}_0$). Dann ist $(X_{T+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette. Die Übergangsverteilung von X_{T+n} nach X_{T+n+1} ist in dem Fall gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1_{\{T+n=k\}} Q_k(X_{T+n}, dx).$$

30. Sei A eine offene und nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, X ein Prozess mit rechtsstetigen Pfaden und $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(X_s, s \leq t)$. Zeigen Sie, dass durch

$$T_A := \inf\{t > 0 : X_t \in A\} \quad , \quad \inf(\emptyset) = +\infty$$

eine schwache Stoppzeit, jedoch i. Allg. keine Stoppzeit bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ definiert wird.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für eine Stoppzeit T auf $C([0,\infty),\mathbb{R})$ gilt

$$\forall \omega, \omega' \forall t \in [0,\infty) : \Big(\omega_{s\wedge t} = \omega'_{s\wedge t} \forall s \in [0,\infty),\, T(\omega) \leq t \Rightarrow T(\omega) = T(\omega')\Big).$$

Bonusaufgabe: Sei A eine abgeschlossene und nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, X ein Prozess mit stetigen Pfaden und $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(X_s, s \leq t)$. Zeigen Sie, dass durch

$$\tau_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\} \quad , \quad \inf(\emptyset) = +\infty$$

eine Stoppzeit bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ definiert wird.