Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2008/2009**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Stochastik II
Serie 10
Abgabe: Dienstag, 13. Januar 2009, vor der Vorlesung

46. Seien A, B, C und D von endlicher Variation. Dann gilt

$$A \cdot (B \cdot (C \cdot D)) = (ABC) \cdot D$$

und

$$(A + B) \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D.$$

47. a) Sei $B : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ rechtsstetig und V die Variation von B. Zeigen Sie, dass gilt $|B| \leq V$.
b) Sei B nun von endlicher Variation V. Ferner seien A_n, A und D Funktionen von $[0, \infty)$ nach $\mathbb{R}$ mit $A_n \to A$ punktweise, $|A_n| \leq D$ und $D \cdot V < \infty$. Dann gilt

$$A_n \cdot B \to A \cdot B \quad \text{punktweise.}$$

Definition: Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine rechtsstetige und vollständige Filtrierung. Ein Prozess M heißt *lokales Martingal*, wenn er adaptiert ist (d.h. M_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar $\forall t$) und Stoppzeiten $\tau_n \uparrow \infty$ existieren, so dass $M^{\tau_n} - M_0$ für alle n ein Martingal ist.

48. Seien X, Y lokale Martingale bezüglich einer Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ und Z eine $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsvariable. Dann sind auch $X + Y$ und ZX lokale Martingale.
Bemerkung: Die Menge der lokalen Martingale bezüglich einer Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ist also ein Vektorraum.

49. Seien X ein lokales Martingal und S und T Stoppzeiten, so dass X^S und X^T gleichmäßig integrierbare Martingale sind. Dann ist $X^{S \vee T}$ ein gleichmäßig integrierbares Martingal.

50. Zeigen Sie, dass jedes lokale Martingal $M \geq 0$ mit $EM_0 < \infty$ ein Supermartingal ist.
Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von Fatou.

Bonusaufgabe: Ist B eine Brownsche Bewegung, und sind S und T beschränkte Stoppzeiten mit $S \leq T$, dann gilt:

$$E[(B_T - B_S)^2] = E(B_T^2 - B_S^2) = E(T - S).$$