Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Wintersemester 2008/2009**

Übungen zur Stochastik II
Serie 11
Abgabe: Dienstag, 20. Januar 2009, vor der Vorlesung

51. Seien X, Y und Z stetige lokale Martingale und $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Kovariation ausschließlich mit Hilfe der Definition:

a) $[X, Y] = [Y, X]$,

b) $[aX, bY] = ab[X, Y]$,

c) $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$,

d) $[X - X_0, Z] = [X, Z]$.

52. Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine rechtsstetige und vollständige Filtrierung und N ein an diese Filtrierung adaptierter Poisson-Prozess mit Intensität λ (vgl. Aufgabe 25). Setze $M_t = N_t - \lambda t$. Zeigen Sie, dass gilt $[M, M]_t = \lambda t$.
Hinweis: Die Kovariation lässt sich analog zu Satz 38.5 auch für rechtsstetige lokale Martingale definieren.

53. Ist $X = (X^1, \ldots, X^d)$ ein Vektor stetiger lokaler Martingale, dann gibt es einen f.s. eindeutigen Prozess A von endlicher Variation, so dass $|X|^2 - A$ ein stetiges lokales Martingal ist.

54. Sind M und N unabhängige, stetige lokale Martingale bzgl. der Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, so ist MN ein stetiges lokales Martingal, und es gilt $[M, N] = 0$.

55. Ist M ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$ und T eine Stoppzeit, so gilt $EM_T^2 \leq E[M, M]_T$.

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine rechtsstetige und vollständige Filtrierung. Ein Prozess X heißt *lokales Submartingal*, wenn er adaptiert ist und Stoppzeiten $\tau_n \uparrow \infty$ existieren, so dass $M^{\tau_n} - M_0$ ein Submartingal ist.

Bonusaufgabe: a) Seien X ein stetiges lokales Martingal mit $X_0 = 0$ und φ eine konvexe Funktion. Dann ist $\varphi(X)$ ein lokales Submartingal.
b) Sei X ein stetiges lokales Submartingal mit $E(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|) < \infty$ für alle $t \geq 0$. Dann ist X ein Submartingal.