

Übungen zur Statistik I  
Serie 1

Abgabe: Dienstag, 21. April 2009, vor der Vorlesung

1. Zeigen Sie, dass folgende Verteilungsfamilien mit Zähldichten exponentielle Familien bezüglich  $\lambda$  bzw.  $p \in (0, 1)$  sind. Geben Sie den natürlichen Parameterraum an.

a) Die Poissonverteilungen  $P_\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , mit Zähldichte

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

b) Die negativen Binomialverteilungen  $B_{n,p}^-$ ,  $p \in (0, 1)$ , mit Zähldichte

$$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}, \quad k = n, n+1, \dots$$

2. Zeigen Sie, dass folgende Verteilungsfamilien mit Lebesgue-Dichte exponentielle Familien bezüglich aller Parameter sind. Geben Sie den natürlichen Parameterraum an.

a) Die Gamma-Verteilungen  $\Gamma_{a,b}$ ,  $a, b > 0$ , mit Dichte

$$\frac{1}{a^b \Gamma(b)} x^{b-1} e^{-x/a}, \quad x > 0.$$

b) Die Beta-Verteilungen  $B_{a,b}$ ,  $a, b > 0$ , mit Dichte

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1.$$

3. Bilden die Exponentialverteilungen  $E(a, \vartheta)$  mit Dichte

$$\vartheta^{-1} e^{-(x-a)/\vartheta} 1_{(a, \infty)}(x), \quad \vartheta > 0, a \in \mathbb{R}$$

und unbekanntem Parametern  $a$  und  $\vartheta$  eine exponentielle Familie? Wie verhält es sich bei festem  $a$ ?

4. Der natürliche Parameterraum einer  $k$ -parametrischen exponentiellen Familie ist konvex und enthält ein nicht-entartetes  $k$ -dimensionales Intervall.

5. Seien  $X_1$  und  $X_2$  unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter  $\lambda > 0$ . Zeigen Sie, dass die Statistik  $X_1 + X_2$  suffizient für  $\lambda$  ist, die Statistik  $2X_1 + X_2$  jedoch nicht.