

Übungen zur Statistik I  
Serie 2

Abgabe: Dienstag, 28. April 2009, vor der Vorlesung

**6.** Zeigen Sie: Ist  $T$  eine suffiziente Statistik und gilt  $T = \psi(S)$  mit einer messbaren Funktion  $\psi$  und einer anderen Statistik  $S$ , dann ist auch  $S$  suffizient.

**7.** Seien  $T$  und  $S$  zwei Statistiken, so dass für eine messbare Funktion  $\psi$  gilt  $S = \psi(T)$ . Beweisen Sie:

- a) Wenn  $T$  vollständig ist, dann ist auch  $S$  vollständig.
- b) Wenn  $T$  vollständig und suffizient und  $\psi$  bijektiv ist, dann ist  $S$  vollständig und suffizient.
- c) Die Ergebnisse aus a) und b) bleiben gültig, wenn man die Vollständigkeit durch die beschränkte Vollständigkeit ersetzt.

**8.** Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und nach  $P_\vartheta \in \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$  verteilt. Bestimmen Sie in den folgenden Fällen eine zweidimensionale suffiziente Statistik für  $\vartheta$ . Überlegen Sie jeweils, ob diese vollständig ist.

- a)  $P_\vartheta$  ist die Gamma-Verteilung  $\Gamma_{a,b}$  mit  $\vartheta = (a, b)^\top$ .
- b)  $P_\vartheta$  ist die  $N_{\vartheta, \vartheta^2}$ -Verteilung.

**9.** Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und  $E(a, \vartheta)$ -verteilt (vgl. Aufgabe 3) mit  $\vartheta > 0$  fest. Geben Sie eine möglichst niedrigdimensionale suffiziente Statistik für  $a$  an. Ist sie vollständig oder minimal?

**10.** Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige und  $N_{\mu, \sigma^2}$ -verteilte Zufallsvariablen. Dann sind  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  und  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  unabhängig.