Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz

Sommersemester 2009

Übungen zur Statistik I
Serie 9
Abgabe: Dienstag, 23. Juni 2009, vor der Vorlesung

41. Formulieren und beweisen Sie analoge Aussagen zu den Sätzen 26 und 27 für das Minimum $X_{1:n}$.

42. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$f(x) = (1+x)1_{(-1,0]}(x) + (1-x)1_{(0,1)}(x).$$

Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung von $X_{1:n}$ und $X_{n:n}$.

43. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 + x^2} \quad , x \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung von $X_{1:n}$ und $X_{n:n}$.

44. Den Erwartungswert $Eg(X)$ einer bekannten Funktion g kann man aufgrund unabhängiger Beobachtungen $X_1, \dots, X_n$ mit Dichte f sowohl mit dem empirischen Schätzer als auch mit dem geglätteten empirischen Schätzer, also mit

$$\mathbb{G} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(X_i) \quad \text{und} \quad \hat{\mathbb{G}} = \int g(x)\hat{f}(x)dx,$$

schätzen. Hier ist $\hat{f}$ zum Beispiel ein geeigneter Kernschätzer der Dichte f. Geben Sie Bedingungen an, unter denen beide Schätzer asymptotisch äquivalent sind, d.h. $n^{1/2}(\hat{\mathbb{G}} - \mathbb{G}) = o_p(1)$. Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung.

45. (*Schätzen der Faltung von Dichten*) Für $j = 1, 2$ seien $\hat{f}_j$ Schätzer für Dichten f_j mit $\|\hat{f}_j - f_j\|_1 = O_p(a_n)$. Dann gilt auch $\|\hat{f}_1 * \hat{f}_2 - f_1 * f_2\|_1 = O_p(a_n)$.