

Übungen zur Statistik I  
Serie 12

Abgabe: Dienstag, 14. Juli 2009, vor der Vorlesung

**56.** Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig mit Verteilungsfunktion  $F$  und Dichte  $f$ . Bezeichne mit  $R_i$  den Rang von  $X_i$ . Dann gilt

- Der Vektor  $(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$  hat die Dichte  $n! \prod_{i=1}^n f(x_i)$  auf der Menge  $x_1 < \dots < x_n$ .
- Der Vektor  $(R_1, \dots, R_n)$  ist gleichverteilt auf der Menge aller  $n!$  Permutationen von  $1, 2, \dots, n$ .
- Die Vektoren  $(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$  und  $(R_1, \dots, R_n)$  sind unabhängig.
- Für jede messbare Abbildung  $T$  und jede Permutation  $(r_1, \dots, r_n)$  von  $1, \dots, n$  gilt

$$E(T(X_1, \dots, X_n) | R_1 = r_1, \dots, R_n = r_n) = ET(X_{r_1:n}, \dots, X_{r_n:n}).$$

**57.** Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und verteilt nach  $P$ . Sei  $P$  invariant unter einer endlichen Gruppe von Transformationen  $T_1, \dots, T_k$ . Seien  $w_1, \dots, w_k$  Gewichte mit  $w_1 + \dots + w_k = 1$ . Dann ist  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^k w_s h(T_s X_i)$  ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für  $Ph$ . Berechnen Sie seine asymptotische Verteilung. Was sind die optimalen Gewichte?

**58.** Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig und verteilt nach  $P$ . Sei  $P$  invariant unter einer Gruppe von Transformationen  $T_s$ ,  $s \in [0, 1]$ . Sei  $w_s$  eine Gewichtsfunktion mit  $\int w_s ds = 1$ . Dann ist  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int w_s h(T_s X_i) ds$  ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für  $Ph$ . Berechnen Sie seine asymptotische Verteilung. Was ist die optimale Gewichtsfunktion?

**59.** Seien  $X_1, \dots, X_m$  unabhängig mit Verteilung  $P_{1,\vartheta}$ ,  $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ , und  $Y_1, \dots, Y_n$  unabhängig und unabhängig von  $X_1, \dots, X_m$  mit Verteilung  $P_{2,\vartheta}$ .

Seien  $\hat{\vartheta}_1$  und  $\hat{\vartheta}_2$  „asymptotische Maximum-Likelihood- Schätzer“ für  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned}\hat{\vartheta}_1 - \vartheta &= \Lambda_{1,\vartheta}^{-1} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \dot{\ell}_{1,\vartheta}(X_i) + o_p(n^{-1/2}), \\ \hat{\vartheta}_2 - \vartheta &= \Lambda_{2,\vartheta}^{-1} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \dot{\ell}_{2,\vartheta}(Y_j) + o_p(n^{-1/2})\end{aligned}$$

mit  $\Lambda_{1,\vartheta} = E[\dot{\ell}_{1,\vartheta}^2(X)]$  und  $\Lambda_{2,\vartheta} = E[\dot{\ell}_{2,\vartheta}^2(Y)]$ . Gelte  $m/n \rightarrow c$ . Konstruieren Sie eine optimale Konvexkombination von  $\hat{\vartheta}_1$  und  $\hat{\vartheta}_2$ .

**60.** Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig mit Verteilungsfunktion  $F \in \mathcal{F}$  und  $P_G$  das zu  $G \in \mathcal{F}$  gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß. Gegeben  $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$  ist die *nichtparametrische Likelihood-Funktion* definiert als das folgende Funktional von  $\mathcal{F}$  nach  $[0, \infty)$ :

$$\ell(G) = \prod_{i=1}^n P_G(\{x_i\}), \quad G \in \mathcal{F}.$$

Zeigen Sie, dass die empirische Verteilungsfunktion  $\mathbb{F}_n$  das Funktional über  $G \in \mathcal{F}$  maximiert.

*Hinweis:* Benutzen Sie die Methode der Lagrange Multiplikatoren.