Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz

Wintersemester 2009/10

Übungen zur Statistik für Zeitreihen (Statistik II)
Serie 11
Abgabe: Dienstag, 19. Januar 2010, vor der Vorlesung

Nach Satz 35 hat die asymptotische Kovarianzmatrix des Schätzers $\hat{\varrho}_s$ die Komponenten

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \big(\varrho(s+i)\varrho(s+j) + \varrho(s-i)\varrho(s+j) \\ &\quad +2\varrho(i)\varrho(j)\varrho^2(s) - 2\varrho(i)\varrho(s)\varrho^2(s+j) - 2\varrho(j)\varrho(s)\varrho^2(s+i)\big). \end{aligned}$$

Dies kann man jedoch auch schreiben als

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \sum_{k=1}^{\infty} \big(\varrho(k+i) + \varrho(k-i) - 2\varrho(i)\varrho(k)\big) \\ &\quad \cdot \big(\varrho(k+j) + \varrho(k-j) - 2\varrho(j)\varrho(k)\big). \end{aligned}$$

51. Benutzen Sie die zweite der beiden Formeln, um die asymptotische Kovarianzmatrix von $\hat{\varrho}_s$ für einen MA(1)-Prozess zu berechnen. Für welche Werte j und k aus $\mathbb{N}$ sind $\hat{\varrho}(j)$ und $\hat{\varrho}(k)$ asymptotisch unkorreliert?

52. Sei $X_i = \varrho X_{i-1} + \varepsilon_i$ mit $|\varrho| < 1$ und ε_i unabhängig N_{0,σ^2}-verteilt. Geben Sie die kausale Darstellung an, zeigen Sie, dass X_i eine Dichte hat, und berechnen Sie diese.

53. Betrachten Sie das gleiche Modell wie in Aufgabe 52. Berechnen Sie die gemeinsame Dichte von $X_0, X_1, \dots, X_n$ und bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzer für ϱ und σ^2, indem Sie nur die bedingte Dichte von $X_1, \dots, X_n$ gegeben X_0 benutzen.

54. Die diskrete Fourier-Transformation $\{a_j, j \in F_n\}$ von $X_1, \dots, X_n$ lässt sich schreiben als

$$a_j = J(\omega_j), \quad \omega_j = \frac{2\pi j}{n} \in (-\pi, \pi],$$

mit

$$J(u) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} X_j e^{-iju}, \quad -\infty < u < \infty.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$X_k = \frac{1}{2\pi} n^{1/2} \int_{-\pi}^{\pi} J(u) e^{iku} du.$$

Bezeichnung: Wir wollen nun $J(u)$ als Fourier-Transformierte von $X_1, \ldots, X_n$ bezeichnen.

55. Sei $Z_j = X_j Y_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Sind J_X, J_Y bzw. J_Z die Fourier-Transformierten von $(X_1, \ldots, X_n)$, $(Y_1, \ldots, Y_n)$ bzw. $(Z_1, \ldots, Z_n)$, dann gilt

$$J_Z(\omega_r) = n^{-1/2} \sum_{s \in F_n} J_X(\omega_s) J_Y(\omega_{r-s}).$$