Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Wintersemester 2009/10**

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 2
Abgabe: Dienstag, 27. April 2010, vor der Vorlesung

6. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und auf dem Intervall $(0, \vartheta)$ gleichverteilt; $\vartheta > 0$ sei unbekannt.
Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}$ und zeigen Sie, dass er stochastisch gegen ϑ konvergiert. Wie ist $n(\vartheta - \hat{\vartheta})$ asymptotisch verteilt?

7. Sei X ein Zufallsvektor mit positiv definiter Kovarianzmatrix, dessen Komponenten alle den gleichen Erwartungswert haben. Finden Sie einen möglichst guten Schätzer für diesen Erwartungswert, und bestimmen Sie seine asymptotische Verteilung.

8. Sei X der (m-dimensionale) Zufallsvektor aus Aufgabe 7 und P seine Verteilung. Sei f eine k-dimensionale Funktion mit positiv definiter Kovarianzmatrix. Die Komponenten f_i von f seien aus $L_2(P)$. Bestimmen Sie einen möglichst guten Schätzer für $Ef(X)$, und berechnen Sie seine asymptotische Verteilung.

9. Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit $E(Y|X) = \vartheta X$ für ein (unbekanntes) $\vartheta \in \mathbb{R}$. Seien (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$, unabhängige Beobachtungen aus diesem Modell. Bestimmen Sie einen Schätzer für die Varianz von $\varepsilon = Y - \vartheta X$. Geben Sie Bedingungen an, unter denen er asymptotisch normal ist, und bestimmen Sie seine asymptotische Varianz.

10. Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor. Es gelte $Y = r(X) + \eta$ mit $E\eta = 0$. X und η seien unabhängig. Was schätzt der Kleinste-Quadrate-Schätzer

$$\hat{\vartheta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

in diesem Fall? Welche Entwicklung besitzt $\hat{\vartheta}$?
Sei nun h eine stetig differenzierbare Funktion mit Lipschitz-stetiger erster Ableitung. Was schätzt dann

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(Y_i - \hat{\vartheta} X_i)?$$

Welche Entwicklung besitzt T?