Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz

Sommersemester 2010

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 3
Abgabe: Dienstag, 4. Mai 2010, vor der Vorlesung

11. (3 Punkte) Sind $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit Verteilungsfunktion F, so ist die Verteilungsfunktion F_r der r-ten Ordnungsstatistik $X_{r:n}$ gegeben durch

$$F_r(x) = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} (F(x))^i (1 - F(x))^{n-i}.$$

Ist zusätzlich F differenzierbar mit Ableitung f, so besitzt $X_{r:n}$ die Dichte

$$f_r(x) = r \binom{n}{r} (F(x))^{r-1} (1 - F(x))^{n-r} f(x).$$

12. *(Bahadur-Darstellung)* **(6 Punkte)** Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Sei F stetig differenzierbar in ξ_p mit $F'(\xi_p) > 0$.

a) Setze für $t \in \mathbb{R}$ $\xi_{nt} := \xi_p + tn^{-1/2}$, $Z_n(t) := n^{1/2} \frac{F(\xi_{nt}) - \mathbb{F}_n(\xi_{nt})}{F'(\xi_p)}$ und $U_n(t) = n^{1/2} \frac{F(\xi_{nt}) - \mathbb{F}_n(\hat{\xi}_p)}{F'(\xi_p)}$. Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$Z_n(t) - Z_n(0) = o_p(1) \quad \text{und} \quad U_n(t) \to t.$$

b) Beweisen Sie mit Hilfe von a), dass gilt

$$\hat{\xi}_p = \xi_p + \frac{F(\xi_p) - \mathbb{F}_n(\xi_p)}{F'(\xi_p)} + o_p(n^{-1/2}).$$

Hinweis: Verwenden Sie (ohne Beweis) die folgende Aussage: Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von Zufallsvariablen. $(X_n)_n$ sei beschränkt in Wahrscheinlichkeit und für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gelte

$$P(X_n \le t, Y_n \ge t + \varepsilon) + P(X_n \ge t + \varepsilon, Y_n \le t) \to 0.$$

Dann gilt $X_n - Y_n = o_p(1)$.

13. (3 Punkte) Für einen Kern K sei $\mu_j(K) := \int u^j K(u)du$ und $\mu_{2p}(K) < \infty$. N_p sei die $(p+1) \times (p+1)$-Matrix mit Einträgen $(N_p)_{i,j=1,\ldots,p+1} = \mu_{i+j-2}(K)$. Die $(p+1) \times (p+1)$-Matrix $M_p(u)$ entstehe aus N_p, indem man die erste Spalte durch $(1, u, \ldots, u^p)^\top$ ersetzt. Dann gilt: Wenn p ungerade ist, so ist

$$K_{(p)}(u) = \frac{\det(M_p(u))}{\det(N_p)} K(u)$$

ein Kern mit $\int u^k K_{(p)}(u)du = 0$ für $k = 1, \ldots, p$.

14. Sei f eine Dichte auf $\mathbb{R}$ mit einem Sprung in x. Wie verhält sich ein Kernschätzer in x?

15. Sei f eine stetig differenzierbare Dichte auf $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie einen (Kern-)Schätzer für die Ableitung von f. Berechnen Sie unter geeigneten Bedingungen die Konvergenzrate.