**Prof. Dr. W. Wefelmeyer**
**Dipl.-Math. Markus Schulz** **Sommersemester 2010**

**Übungen zur Asymptotischen Statistik**
**Serie 4**
Abgabe: Dienstag, 11. Mai 2010, vor der Vorlesung

**16.** Sei $f$ eine Dichte auf $\mathbb{R}$, die in 0 einen Sprung hat. Wie können Sie die Sprunghöhe schätzen? (Das Problem wird wesentlich schwieriger, wenn nicht bekannt ist, wo sich der Sprung befindet – selbst wenn bekannt ist, dass es nur einen Sprung gibt.)

**17.** Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit Verteilungsfunktion $F$ und zugehöriger stetiger Lebesgue-Dichte $f$. Setze

$$f_n(x) = \frac{\mathbb{F}_n(x+b) - \mathbb{F}_n(x-b)}{2b},$$

wobei $\mathbb{F}_n$ die empirische Verteilungsfunktion und $b = b_n$ eine Nullfolge mit $b_n > 0$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass $f_n$ eine Lebesgue-Dichte auf $\mathbb{R}$ ist.

b) Sei $f$ stetig differenzierbar in $t$, $b \to 0$ und $nb \to \infty$. Bestimmen Sie den mittleren quadratischen Fehler.

c) Unter den Voraussetzungen aus b) und $nb^3 \to 0$ gilt

$$\sqrt{nb}(f_n(t) - f(t)) \Rightarrow N_{0,f(t)/2}.$$

**18.** Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit Dichte $f$. Sei $\hat{f}$ der zugehörige Kernschätzer

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_b(x - X_i).$$

a) Zeigen Sie, dass $\hat{f}$ eine Lebesgue-Dichte auf $\mathbb{R}$ ist.

b) Gelte $b \to 0$, $nb \to \infty$ sowie $w_0 := \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u)du < \infty$ und sei $f$ beschränkt und stetig in $t$, dann gilt

$$\sqrt{nb}(\hat{f}(t) - E[\hat{f}(t)]) \Rightarrow N_{0,w_0 f(t)}.$$

c) Zusätzlich zu den Voraussetzungen von b) gelte $nb^3 \to 0$ sowie $\int_{-\infty}^{\infty} |u|K(u)du < \infty$ und $f$ sei stetig differenzierbar in $t$ mit beschränkter Ableitung. Dann gilt

$$\sqrt{nb}(\hat{f}(t) - f(t)) \Rightarrow N_{0,w_0 f(t)}.$$

*Hinweis:* Wenden Sie den folgenden Zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg an:
Seien $X_{n1}, \ldots, X_{nk_n}$ unabhängige Zufallsvariablen mit
$0 < \sigma_n^2 = \mathrm{Var}\big(\sum_{j=1}^{k_n} X_{nj}\big) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gelte $k_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Wenn

$$\sum_{j=1}^{k_n} E[(X_{nj} - EX_{nj})^2 1_{\{|X_{nj}-EX_{nj}|>\varepsilon\sigma_n\}}] = o(\sigma_n^2) \quad \forall \varepsilon > 0,$$

dann gilt

$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{k_n} (X_{nj} - EX_{nj}) \Rightarrow N_{0,1}.$$

**19.** Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Zugehörigkeit zu $\mathrm{Lip}_{r,1}(L)$ bzw. $\mathcal{L}_{r,1}$:

a) $f(x) = \frac{1}{2} 1_{[-1,1]}(x)$,

b) $g(x) = \exp(-\frac{1}{1-x^2}) 1_{(-1,1)}(x)$,

c) $h(x) = (1+x) 1_{[-1,0]}(x) + (1-x) 1_{(0,1]}(x)$.

**20.** Sei $t$ eine bijektive, streng monoton wachsende und stetig differenzierbare Abbildung mit beschränkter Ableitung. Aus einer Zufallsvariable $X$ mit Dichte $g \in \mathcal{L}_{1,1}$ bilde man durch $Y = t^{-1}(X)$ eine Zufallsvariable mit Dichte $f(x) = g(t(x))t'(x)$. Definiere

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t'(x) K_b(t(x) - t(X_i))$$

mit einem Kern $K \in \mathcal{K}_{1,1}$. Berechnen Sie für diesen Schätzer den integrierten mittleren quadratischen Fehler (MISE).