Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2010**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 7
Abgabe: Dienstag, 15. Juni 2010, vor der Vorlesung

31. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit stetiger Dichte $f > 0$ und Verteilungsfunktion F. Zudem existiere ein $\alpha > 0$, so dass gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{xf(x)}{1 - F(x)} = \alpha.$$

Für $x^*_{rn} = F^{-1}\big(1 - \frac{1}{n}\big)$ gilt dann

$$P\left(\frac{X_{n:n}}{x^*_{rn}} \le t\right) \to \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}} & , t > 0 \\ 0 & , t \le 0 \end{cases}.$$

Seien im Folgenden X_i, $i \in \mathbb{N}$, unabhängig mit Verteilungsfunktion F. Sei $g(X_1, \ldots, X_m)$ integrierbar und symmetrisch in den Argumenten. Die zu $X_1, \ldots, X_n$ mit $n \ge m$ gehörige *U-Statistik* mit *Kern* g ist

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{\{i_1, \ldots, i_m\} \subset \{1, \ldots, n\}} g(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}).$$

32. Setze $\bar{g} = g - E[g(X_1, \ldots, X_m)]$ und definiere

$$\begin{aligned} g_k(x_1, \ldots, x_k) &= E[g(x_1, \ldots, x_k, X_{k+1} \ldots, X_m)] \\ &= E(g(X_1, \ldots, X_m) | X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für eine U-Statistik U_n mit $E[g^2(X_1, \ldots, X_m)] < \infty$ gilt

$$\operatorname{Var}(U_n) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \binom{n-m}{m-k} \zeta_k$$

mit $\zeta_k := \operatorname{Var}(g_k(X_1, \ldots, X_k))$.

33. Zeigen Sie unter den Voraussetzungen aus Aufgabe 32:

a) Es gilt $\zeta_1 \le \zeta_2 \le \cdots \le \zeta_m$.

b) Sei m fest und k zwischen 1 und m so, dass $\zeta_j = 0$ für $j < k$ und $\zeta_k > 0$, dann gilt

$$\operatorname{Var}(U_n) = \frac{k!\binom{m}{k}^2 \zeta_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

34. Definiere $\check{U}_n = EU_n + \frac{m}{n}\sum_{i=1}^n (g_1(X_i) - E[g(X_1,\ldots,X_m)])$ mit g_1 wie in Aufgabe 32. Sei $E[g^2(X_1,\ldots,X_m)] < \infty$ und $\zeta_1 > 0$.

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$E[(U_n - \check{U}_n)^2] = O(n^{-2}).$$

b) Folgern Sie

$$\sqrt{n}(U_n - EU_n) \Rightarrow N_{0,m^2\zeta_1}.$$

35. a) Sei V_n eine *V-Statistik* mit symmetrischem Kern ψ vom Grad k, d.h.

$$V_n = n^{-k} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \psi(X_{i_1},\ldots,X_{i_k}).$$

Dann gilt

$$V_n = n^{-k} \sum_{j=1}^k j! \mathcal{S}_k^{(j)} \binom{n}{j} U_n^{(j)},$$

wobei $U_n^{(j)}$ eine U-Statistik vom Grad j mit Kern $\phi_{(j)}$ gegeben durch

$$\phi_{(j)}(x_1,\ldots,x_j) = (j!\mathcal{S}_k^{(j)})^{-1} \sum_{(j)}^{*} \psi(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$$

ist. Die Größen $\mathcal{S}_k^{(j)}$ seien definiert durch

$$n^k = \sum_{j=1}^k \mathcal{S}_k^{(j)} n(n-1)\cdots(n-j+1).$$

Die Summe $\sum_{(j)}^*$ wird über alle k-Tupel aus $\{1,2,\ldots,j\}$ gebildet.
b) Welche Gestalt hat V_n für $k = 3$? Wie ist $\sqrt{n}(V_n - EV_n)$ asymptotisch verteilt?