Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2010**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 8
Abgabe: Dienstag, 22. Juni 2010, vor der Vorlesung

36. Seien $X_1, \dots, X_m$ unabhängig mit Verteilung $P_{1,\vartheta}$, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, und $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig und unabhängig von $X_1, \dots, X_m$ mit Verteilung $P_{2,\vartheta}$. Seien $\hat{\vartheta}_1$ und $\hat{\vartheta}_2$ „asymptotische Maximum-Likelihood-Schätzer" für ϑ:

$$\begin{aligned}
\hat{\vartheta}_1 - \vartheta &= \Lambda_{1,\vartheta}^{-1} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \dot{\ell}_{1,\vartheta}(X_i) + o_p(m^{-1/2}), \\
\hat{\vartheta}_2 - \vartheta &= \Lambda_{2,\vartheta}^{-1} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \dot{\ell}_{2,\vartheta}(Y_j) + o_p(n^{-1/2})
\end{aligned}$$

mit $\Lambda_{1,\vartheta} = E[\dot{\ell}_{1,\vartheta}^2(X)]$ und $\Lambda_{2,\vartheta} = E[\dot{\ell}_{2,\vartheta}^2(Y)]$. Gelte $m/n \to c$. Konstruieren Sie eine optimale Konvexkombination von $\hat{\vartheta}_1$ und $\hat{\vartheta}_2$.

37. a) Sei μ ein σ-endliches und ν ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann gilt $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für alle $B \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mu(B) \leq \delta \ \Rightarrow \ \nu(B) \leq \varepsilon.$$

b) Betrachte nun die Folgen (P_n) und (Q_n) mit $P_n := P$ und $Q_n := Q$ für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q. Zeigen Sie, dass $Q_n \lhd P_n$ genau dann gilt, wenn $Q \ll P$.

38. a) Bezeichne $U(a,b)$ die Gleichverteilung auf dem Intervall (a,b). Für $n \in \mathbb{N}$ seien $P_n := \bigotimes_{j=1}^n U(0,1)$ und $Q_n := \bigotimes_{j=1}^n U(n^{-\delta}, 1 + n^{-\delta})$, $\delta > 0$. Dann gilt:

$$Q_n \lhd P_n \quad \Leftrightarrow \quad \delta > 1.$$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $P_n := \bigotimes_{j=1}^n N_{0,1}$ und $Q_n := \bigotimes_{j=1}^n N_{n^{-\delta},1}$, $\delta > 0$. Dann gilt:

$$Q_n \lhd P_n \quad \Leftrightarrow \quad \delta \geq \frac{1}{2}.$$

39. a) Definiere $\|P - Q\| := \sup_A |P(A) - Q(A)|$. Seien nun zwei Folgen (P_n) und (Q_n) von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit $\|P_n - Q_n\| \to 0$ gegeben.

Zeigen Sie, dass gilt $P_n \lhd Q_n$ und $Q_n \lhd P_n$.
b) Sei $\varepsilon > 0$. Finden Sie ein Beispiel von Folgen (P_n) und (Q_n), so dass $P_n \lhd Q_n$ und $Q_n \lhd P_n$ gilt, aber $\|P_n - Q_n\|$ gegen $1-\varepsilon$ konvergiert.

40. Seien (P_n) und (Q_n) Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf messbaren Räumen $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, und sei $X_n : \Omega_n \to \mathbb{R}^k$ eine Folge von Zufallsvariablen. Es gelte $Q_n \lhd P_n$ und

$$\left(X_n, \frac{dQ_n}{dP_n}\right) \Rightarrow (X, V) \quad \text{unter } P_n.$$

Dann ist durch $L(B) = P1_B(X)V$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert, und es gilt $X_n \Rightarrow L$ unter Q_n.
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis die Aussagen

$$Q_n \lhd P_n \Leftrightarrow \left(\text{ Wenn } \frac{dQ_n}{dP_n} \Rightarrow V \text{ unter } P_n \text{ für eine Teilfolge, dann } EV = 1\right)$$

und

$$V_n \Rightarrow V \text{ äquivalent zu } (\liminf_{n\to\infty} P_n f(V_n) \geq Pf(V)\ \forall f \geq 0 \text{ stetig}).$$

Mitteilung der Fachschaft:
Am 18.06.10 veranstaltet die Fachschaft wieder ein großes Sommerfest!
Auf dem Parkplatz des Mathematischen Instituts gibt es ab 18.00 Uhr eine tolle Hüpfburg, Kölsch, andere Getränke und Musik.
Ihr seid herzlich eingeladen, wir freuen uns auf Euch!

Bereits um 17.00 Uhr findet am 18.06.10 ein Vortrag von Herrn Prof. Dr. Peter Dombrowski zum Thema „Orientierte, geschlossene Polyederflächen: Eulers Polyedersatz und ein Gauss-Bonnet-Satz für diese Flächen mit (kombinatorischen) Konsequenzen“ statt. Auch dazu seid ihr herzlich eingeladen.