Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Sommersemester 2010**

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 9
Abgabe: Dienstag, 29. Juni 2010, vor der Vorlesung

Eine Abbildung $s \mapsto a_s$ von $\mathbb{R}$ nach $L_p(P)$ heißt $L_p(P)$-*differenzierbar* in t mit *Ableitung* $\dot{a}$, wenn

$$\|a_s - a_t - (s-t)\dot{a}\|_p = o(|s-t|).$$

Eine Abbildung $s \mapsto f_s$ von $\mathbb{R}$ in die Dichten auf $\mathbb{R}$ heißt *Hellinger-differenzierbar* in t mit *Ableitung* $\dot{a}$, wenn

$$\lambda\Big(f_s^{1/2} - f_t^{1/2} - \frac{1}{2}(s-t)\dot{a}f_t^{1/2}\Big)^2 = o((s-t)^2).$$

41. Sei $1 \leq p < q$. Ist $s \mapsto a_s$ $L_q(P)$-differenzierbar in t, so auch $L_p(P)$-differenzierbar mit derselben Ableitung.

42. Ist $s \mapsto f_s/f_t$ $L_2(f_t)$-differenzierbar in t, so ist $s \mapsto f_s$ Hellinger-differenzierbar mit derselben Ableitung.
Hinweis: $f_s - f_t = (f_s^{1/2} - f_t^{1/2})(f_s^{1/2} + f_t^{1/2})$.

43. Ist $s \mapsto f_s$ Hellinger-differenzierbar in t, so ist $s \mapsto f_s/f_t$ $L_1(f_t)$-differenzierbar mit derselben Ableitung.

44. Für jedes ϑ aus einer offenen Teilmenge Θ von $\mathbb{R}$ sei p_ϑ eine Wahrscheinlichkeitsdichte bzgl. des Lebesgue-Maßes. Die Abbildung $\vartheta \mapsto \sqrt{p_\vartheta(x)}$ sei stetig differenzierbar für alle x. Wenn $I_\vartheta = \int (\dot{p}_\vartheta/p_\vartheta)^2 p_\vartheta d\lambda$ wohldefiniert und als Funktion von ϑ stetig ist, dann ist $\vartheta \mapsto p_\vartheta$ Hellinger-differenzierbar mit Ableitung $\dot{\ell}_\vartheta = \dot{p}_\vartheta/p_\vartheta$.
Hinweis: Verwenden Sie die folgende Aussage (Beweis!):
Seien f_n und f messbare Funktionen mit $f_n \to f$ μ-f. ü. und $\limsup \int |f_n|^2 d\mu \leq \int |f|^2 d\mu < \infty$ für ein Maß μ. Dann gilt $\int |f_n - f|^2 d\mu \to 0$.

45. a) Zeigen Sie, dass die Lageparameter-Familie P_ϑ, $\vartheta \in \mathbb{R}$, mit Lebesgue-Dichten

$$p_\vartheta(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\vartheta|}$$

in jedem Punkt $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ Hellinger-differenzierbar mit Ableitung $\dot{\ell}_{\vartheta_0}(x) = \operatorname{sgn}(x-\vartheta_0)$ ist.
b) Zeigen Sie, dass die Familie der Dichten der Gleichverteilung auf $[0,\vartheta]$, $\vartheta > 0$, nirgendwo Hellinger-differenzierbar ist.