Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2010**
Dipl.-Math. Markus Schulz

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 10
Abgabe: Dienstag, 6. Juli 2010, vor der Vorlesung

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit Verteilung P_ϑ, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Sei $\kappa : \Theta \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in ϑ.

46. Ist $\hat{\vartheta}$ regulär in ϑ mit Limes V, so ist $\kappa(\hat{\vartheta})$ regulär für κ in ϑ mit Limes $\kappa'(\vartheta)V$.

47. Ist $\hat{\vartheta}$ asymptotisch linear in ϑ mit Einflussfunktion h, so ist $\kappa(\hat{\vartheta})$ asymptotisch linear für κ in ϑ mit Einflussfunktion $\kappa'(\vartheta)h$.

48. Ist $\hat{\vartheta}$ regulär und effizient in ϑ, so ist $\kappa(\hat{\vartheta})$ regulär und effizient für κ in ϑ.

49. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig N_{ϑ,σ^2}-verteilt mit bekannter Varianz σ^2.

a) Zeigen Sie, dass die Familie $(N_{\vartheta,\sigma^2})_{\vartheta \in \mathbb{R}}$ Hellinger-differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung.

b) Bestimmen Sie einen regulären und effizienten Schätzer für $E[X_1^3]$.

c) Seien nun $X_1, \dots, X_n$ unabhängig $N(\vartheta, I)$-verteilt mit $\vartheta \in \mathbb{R}^3$ und der Einheitsmatrix I. Dann ist der Schätzer
$$\hat{\vartheta} = \Big(1 - \frac{1}{n|\bar{X}_n|^2}\Big)\bar{X}_n$$
von ϑ in 0 nicht regulär.

50. Seien $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ unabhängige zweidimensionale Zufallsvektoren mit Verteilung P_ϑ, so dass gilt: $Y_i = \vartheta X_i + \varepsilon_i$ mit X_i und ε_i unabhängig. Für jedes $i = 1, \dots, n$ besitze ε_i die bekannte Dichte f mit $\int u^2 f(u)du < \infty$ sowie $\int uf(u)du = 0$ und X_i die bekannte Dichte g mit $\int x^2 g(x)dx > 0$. f sei stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Zudem gelte $\lim_{x\to\pm\infty} xf(x) = 0$. Bestimmen Sie die effiziente Einflussfunktion. Ist der Kleinste Quadrate-Schätzer
$$\hat{\vartheta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$
effizient? Ist er regulär?