Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dipl.-Math. Markus Schulz **Sommersemester 2010**

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 12
Abgabe: Dienstag, 20. Juli 2010

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathbb{Z}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij}. Ein Zustand i heißt *rekurrent*, wenn die Kette mit Wahrscheinlichkeit 1 in endlicher Zeit nach i zurückkehrt. Andernfalls nennt man den Zustand *transient*. Man kann zeigen, dass ein Zustand i genau dann rekurrent ist, wenn gilt $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.
Ein Zustand i heißt *absorbierend*, wenn $p_{ii} = 1$ und $p_{ij} = 0$ für $j \neq i$.

56. *(Irrfahrt)* Betrachte die Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \mathbb{Z}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p$ und $p_{ij} = 0$ sonst.

a) Bestimmen Sie die *n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten* $p_{ij}^{(n)}$, d.h. die Wahrscheinlichkeiten, bei Start in i nach n Schritten den Zustand j zu erreichen.

b) Zeigen Sie, dass der Zustand 0 genau dann rekurrent ist, wenn $p = \frac{1}{2}$.

57. Betrachte eine Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$ und Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche Zustände sind rekurrent, welche transient? Gibt es absorbierende Zustände? Bestimmen Sie eine invariante Verteilung für den Teilraum $\{6, 7, 8\}$.

In den nächsten drei Aufgaben sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum E. Sie besitze die Übergangsverteilung Q und die Startverteilung π (= invariante Verteilung).

58. Konstruieren Sie effiziente Schätzer für π und Q.

59. Konstruieren Sie einen effizienten Schätzer für $E_\pi f(X_0, X_1, X_2)$.

60. Konstruieren Sie einen effizienten Schätzer für die Zweischritt-Übergangsverteilung.