Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

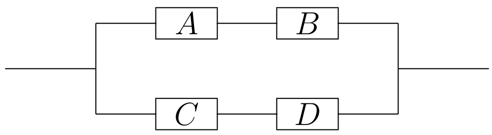
Wintersemester 2010/2011

Klausur zur Einführung in die Stochastik
19.02.2011

Aufgabe 1: (6 Punkte) Im Sechserpack eines Kakaotrunks sollte an jeder Packung ein Trinkhalm sein, der jedoch mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ fehlt, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ defekt ist und nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ gut ist. Sei A das Ereignis „Mindestens ein Trinkhalm fehlt und mindestens einer ist gut“. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.

Aufgabe 2: (4 Punkte) *(Übertragungsfehler)* Angenommen, beim Übertragen digitaler Daten werden 5% der gesendeten Nullen als Einsen und 3% der gesendeten Einsen als Nullen empfangen. Das Verhältnis von gesendeten Nullen zu gesendeten Einsen sei 3 : 5. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine empfangene Null richtig gedeutet?

Aufgabe 3: (6 Punkte) Ein System besteht aus vier gleichartigen, voneinander unabhängigen Komponenten. Es funktioniert, wenn (A und B) oder (C und D) funktionieren.



Die Funktionsdauer des Gesamtsystems werde mit T, die der einzelnen Komponenten mit T_k, $k \in \{A, B, C, D\}$, bezeichnet. T_k sei E_a-verteilt. Zeigen Sie, dass

$$P(T \leq t) = (1 - e^{-2t/a})^2$$

für $t > 0$.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Zeigen Sie: Ist X verteilt nach G_p mit $p \in (0, 1)$, so gilt für alle $m, k \in \mathbb{N}_0$

$$P(X > k + m | X > k) = P(X > m).$$

Aufgabe 5: (8 Punkte) Die Zahl der Bücher, die während eines Jahres aus einer großen Bibliothek verschwinden, kann als P_λ-verteilt angenommen werden. Bei der Jahresendrevision wird das Fehlen eines Buches mit Wahrscheinlichkeit p entdeckt und in diesem Fall das Buch unmittelbar ersetzt. Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl fehlender Bücher nach der Revision.

Aufgabe 6: (6 Punkte) Ein Hotel hat 200 Betten. Wie viele Reservierungen darf der Hotelmanager akzeptieren, wenn erfahrungsgemäß eine Reservierung mit Wahrscheinlichkeit 0,2 annuliert wird, und die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens 0,025 sein soll?
Hinweis: Benutzen Sie die Normalapproximation.

Aufgabe 7: (6 Punkte) Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und E_a-verteilter Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

$$\max_{1\le i\le n} X_i - a\cdot\log n$$

in Verteilung gegen eine Zufallsvariable Z konvergiert. Bestimmen Sie die Verteilung von Z.

Aufgabe 8: (4 Punkte) Seien $X_1,\dots,X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$f_\vartheta(x) = e^{-(x-\vartheta)}\,1_{[\vartheta,\infty)}(x).$$

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ.

Aufgabe 9: (8 Punkte) Seien $X_1,\dots,X_n$ unabhängig mit Dichte

$$\varrho_\vartheta(x) = \vartheta\beta x^{\beta-1}\exp(-\vartheta x^\beta)\,1_{(0,\infty)}(x)\ ,\ \vartheta>0$$

und bekanntem $\beta>0$.

a) Zeigen Sie: $T=\vartheta\sum_{i=1}^n X_i^\beta$ ist $\Gamma_{1,n}$-verteilt.

b) Zeigen Sie, dass $(X_1,\dots,X_n)$ nach einer exponentiellen Familie verteilt ist und monotone Dichtequotienten hat.

c) Bestimmen Sie einen gleichmäßig besten Test φ zum Niveau α für $H:\vartheta\le\vartheta_0$ gegen $K:\vartheta>\vartheta_0$.

Aufgabe 10: (8 Punkte) Seien $X_1,\dots,X_n$ unabhängig und P_λ-verteilt. Bestimmen Sie ein Konfidenz<u>intervall</u> für λ zum asymptotischen Niveau $1-\alpha$. Ersetzen Sie dazu (wie bei den zweiseitigen Tests) die in den Intervallgrenzen auftretende Varianz durch einen Schätzer, und zeigen Sie, dass die Überdeckungswahrscheinlichkeit asymptotisch unverändert bleibt.