Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Wintersemester 2010/11**

Übungen zur Einführung in die Stochastik
Serie 3
Abgabe: Dienstag, 2. November 2010, nach der Vorlesung

11. Bei einer Ziehung des Zahlenlottos *6 aus 49* wurden die Gewinnzahlen 25, 26, 27, 30, 31, 32 gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass wie hier zwei getrennte Dreierblocks aufeinanderfolgender Zahlen gezogen werden.
Hinweis:
Sei $\mathcal{X} = \{(x_1, \ldots, x_6) : 1 \leq x_1 < \cdots < x_6 \leq 49\}$ die Menge aller möglichen Ziehungsergebnisse und $\mathcal{Y} = \{(y_1, \ldots, y_6) : 1 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_6 \leq 44\}$. Betrachten Sie die bijektive Abbildung $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ mit

$$f((x_1, \ldots, x_6)) = (x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, x_4 - 3, x_5 - 4, x_6 - 5).$$

Abschnitte aufeinanderfolgender Zahlen eines 6-Tupels werden durch diese zu Abschnitten gleicher Zahlen.

12. a) Beweisen Sie **mit kombinatorischen Argumenten** die Binomische Formel

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

b) Beweisen Sie **mit kombinatorischen Argumenten** die Formel für die *Vandermonde-Konvolution*:

$$\sum_{k=0}^{\min\{i,n\}} \binom{n}{k} \binom{m}{i-k} = \binom{m+n}{i}.$$

13. Von 1000 befragten Haushalten besitzen 603 einen CD-Spieler, 634 einen Videorekorder, 478 einen PC, 392 einen CD-Spieler und einen Videorekorder, 322 einen CD-Spieler und einen PC und 297 einen Videorekorder und einen PC. 214 Haushalte gaben an, alle drei Geräte zu besitzen. Wie viele Haushalte besitzen keines der drei Geräte?

14. Sei Ω ein Grundraum und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß darauf. Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse in Ω. Zeigen Sie

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,n\}} P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big).$$

15. Ein gut gemischtes Skatspiel wird so an drei Spieler A, B und C verteilt, dass jeder Spieler zehn Karten erhält. Zwei Karten werden als sogenannter Skat abgelegt.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein beliebiger Spieler alle vier Asse bekommt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Spieler A genau drei Asse auf der Hand?

Heiteres aus der Stochastik:

Ein Politiker, der einen Flug antreten muss, erkundigt sich bei einem Mathematiker, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine Bombe im Flugzeug ist. Der Mathematiker rechnet eine Woche lang und verkündet dann: „Die Wahrscheinlichkeit ist ein Zehntausendstel!“ Dem Politiker ist das noch zu hoch, und er fragt den Mathematiker, ob es nicht eine Methode gibt, die Wahrscheinlichkeit zu senken. Der Mathematiker verschwindet wieder für eine Woche und hat dann die Lösung. Er sagt: „Nehmen sie doch selbst eine Bombe mit an Bord. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Bomben an Bord sind, ist dann das Produkt: $1/10000*1/10000 =$ eins zu Hundert Millionen. Damit können sie beruhigt fliegen!“