

Übungen zur Einführung in die Stochastik
Serie 6

Abgabe: Dienstag, 23. November 2010, nach der Vorlesung

26. (*Stetigkeit von Maßen*) Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer σ -Algebra \mathcal{F} . Sind nun $A, A_n \in \mathcal{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben mit der Eigenschaft $A_n \uparrow A$, so gilt

$$PA_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} PA.$$

Hinweis: Die Notation $A_n \uparrow A$ bedeutet $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$.

Definition: Sei \mathcal{S} ein System von Mengen. Dann wird die kleinste σ -Algebra, die \mathcal{S} enthält, mit $\sigma(\mathcal{S})$ bezeichnet und *von \mathcal{S} erzeugte σ -Algebra* genannt. Man kann zeigen, dass sie die Darstellung

$$\sigma(\mathcal{S}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{S} \subset \mathcal{A}}} \mathcal{A}$$

besitzt.

27. Bezeichne \mathcal{O}_m das System der offenen Mengen aus \mathbb{R}^m . Zeigen Sie, dass gilt $\mathcal{B}^m = \sigma(\mathcal{O}_m)$, d.h. die offenen Mengen bilden einen Erzeuger der Borel- σ -Algebra.

28. Seien (Ω, \mathcal{F}) und (Ω', \mathcal{F}') Mengen mit σ -Algebren, und sei $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung. Falls nun gilt $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{S})$ und $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ für alle $S \in \mathcal{S}$, so ist X messbar.

29. Sind $X_n, n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen auf einem messbaren Raum (Ω, \mathcal{F}) , so auch $\inf_{n \in \mathbb{N}} X_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ (sofern letztere existieren und reellwertig sind).

30. a) Stetige Funktionen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n sind messbar, wenn die beiden Grundräume mit den Borel-Algebren versehen werden.

b) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar (mit nicht notwendig stetiger Ableitung f'), so ist f' messbar.

Heiteres aus der Stochastik:

„Herr Feig, warum nehmen Sie immer einen Flug früher?“

„Naja, manchmal stürzen Flugzeuge ab...“

„Ja und weiter...?“

„Mal angenommen, eins von einer Million stürzt ab, und das wär jetzt grad meins gewesen, dann bin ich gerettet. Aber dass ich ausgerechnet in eins umsteige, was abstürzt, ist völlig unwahrscheinlich.“

„Herr Feig, danke für das Interview. Beeilen Sie sich, die rufen gerade Ihren Flug aus!“

„All passengers to Swissair knarzspotz last boarding...“