

Übungen zur Einführung in die Stochastik
Serie 9

Abgabe: Dienstag, 14. Dezember 2010, vor der Vorlesung

41. Seien X_n und Y_n Zufallsvariablen mit $X_n \rightarrow 0$ in Wahrscheinlichkeit und $Y_n = O_p(1)$. Zeigen Sie, dass dann auch $X_n Y_n$ in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert.

42. (5 Punkte) Seien X und X_n , $n \in \mathbb{N}$, reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie:

a) $X_n \rightarrow X$ in W. impliziert $X_n \Rightarrow X$.

b) Die Umkehrung von a) gilt im Allgemeinen nicht, wohl aber wenn X konstant ist.

43. (3 Punkte) a) Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine in c stetige Funktion und seien X_n , $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen mit $X_n \rightarrow c$ in W. Dann gilt

$$h(X_n) \rightarrow h(c) \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.}$$

b) Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend und seien X , X_n , $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen mit $X_n \Rightarrow X$. Zeigen Sie, dass gilt

$$h(X_n) \Rightarrow h(X).$$

44. Seien X_1, X_2, \dots unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $[1, e]$. Konvergiert $(\prod_{i=1}^n X_i)^{1/n}$ in Wahrscheinlichkeit? Wenn ja, wogegen?

45. Seien X_1, X_2, \dots unabhängig und gleichverteilt auf $(0, \vartheta)$ mit $\vartheta > 0$. Definiere $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Beweisen Sie:

a) M_n konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen ϑ .

b) $n(\vartheta - M_n)$ konvergiert schwach gegen eine Zufallsvariable Z . Welche Verteilung hat sie?

Heiteres aus der Stochastik:

Four professors (An engineer, a physicist, a chemist, and a statistician) are called in to see their dean. Just as they arrive the dean is called out of his office, leaving the four professors there. The professors see with alarm that there is a fire in the wastebasket.

“Brute force is the answer” says the engineer. “If we hit it enough we can put it out”.

The physicist says, “I know what to do! We must cool down the materials until their temperature is lower than the ignition temperature and then the fire will go out.”

The chemist says, “No! No! I know what to do! We must cut off the supply of oxygen so that the fire will go out due to lack of one of the reactants.”

While they debate what course to take, they are alarmed to see the statistician running around the room starting other fires. They both scream, “What are you doing?” To which the statistician replies, “Trying to get an adequate sample size.”