Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2011**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Serie 2
Abgabe: Dienstag, 19. April 2011, vor der Vorlesung

6. Bezeichne $\mathcal{O}$ das System der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann gilt $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}$.

7. a) Eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Maßen auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ sei isoton, d.h. es gelte $\mu_n A \leq \mu_{n+1} A$ für alle $A \in \mathcal{F}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann wird durch $\mu A := \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n A$, $A \in \mathcal{F}$, ein Maß auf $\mathcal{F}$ definiert.
b) Seien $\nu_1, \nu_2, \ldots$ Maße auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ nichtnegative reelle Zahlen. Dann ist auch

$$\nu := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \nu_n$$

ein Maß auf $\mathcal{F}$.

8. Seien Ω abzählbar unendlich und $\mathcal{F}$ die Menge aller Teilmengen von Ω. Definiere $\mu A = 0$ für A endlich und $\mu A = \infty$ sonst.

a) Die Mengenfunktion μ ist additiv, aber nicht σ-additiv.

b) Der Grundraum Ω ist Limes einer aufsteigenden Folge von Mengen A_n mit $\mu A_n = 0$.

9. Seien Ω beliebig und $\mathcal{F}$ die Menge aller Teilmengen von Ω. Definiere $\mu A = \#\{\omega : \omega \in A\}$ für $A \subset \Omega$.

a) Die Mengenfunktion μ ist ein Maß, das *Zählmaß*.

b) Ist Ω unendlich, so gibt es eine Folge von Mengen $A_n \downarrow \emptyset$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \mu A_n \neq 0.$$

10. Sei μ ein endliches Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ mit $A_n \to A$. Dann gilt

$$\mu A_n \to \mu A.$$