Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2011**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Serie 3
Abgabe: Dienstag, 26. April 2011, vor der Vorlesung

11. Seien μ eine additive und nichtnegative Mengenfunktion auf einer Algebra $\mathcal{A}$ über Ω und μ^* das zugehörige äußere Maß. Dann gibt es für alle $B \subset \Omega$ eine Menge $A \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $B \subset A$ und $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.

12. Seien $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}$ das System der Mengen $A \subset \mathbb{R}$, für welche A oder A^c höchstens abzählbar ist. Auf dieser σ-Algebra betrachte man das Maß μ, das gegeben ist durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } A \text{ höchstens abzählbar} \\ 1 & , \text{ falls } A^c \text{ höchstens abzählbar.} \end{cases}$$

Beweisen Sie:
a) Das zu μ gehörige äußere Maß μ^* ordnet jeder Menge $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ den Wert 0 bzw. 1 zu, je nachdem ob A höchstens abzählbar oder überabzählbar ist.
b) Auf $\mathcal{P}(\Omega)$ ist μ^* kein Maß.
c) Es gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$.

13. Sei F eine Verteilungsfunktion und μ das zugehörige Lebesgue-Stieltjes-Maß. Schreibe $y \to x-$, wenn $y \to x$ mit $y < x$.

a) Die Funktion F besitzt in jedem Punkt x einen linken Limes

$$F(x-) = \lim_{y \to x-} F(y).$$

b) Es gilt $\mu\{x\} = F(x) - F(x-)$.

c) Die Funktion F ist stetig genau dann, wenn $\mu\{x\} = 0$.

d) Es gilt

$$\begin{aligned} \mu[a,b] &= F(b) - F(a-), \\ \mu(a,b) &= F(b-) - F(a), \\ \mu[a,b) &= F(b-) - F(a-). \end{aligned}$$

14. a) Zeigen Sie, dass eine Verteilungsfunktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat.

b) Gibt es Verteilungsfunktionen, deren Unstetigkeitsstellen dicht in $\mathbb{R}$ liegen?

15. Für jede Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ einer Menge Ω in eine Menge Ω' und jedes Mengensystem $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ zeige man:

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}')) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}')).$$