Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Sommersemester 2011**

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Serie 6
Abgabe: Dienstag, 17. Mai 2011, vor der Vorlesung

26. Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty)$ eine messbare, nichtnegative reelle Funktion. Dann gilt:

$$\int f \, d\mu = \int 1_{[0,\infty)}(t)\mu(\{f \geq t\})\lambda^1(dt).$$

Hinweise: 1. Die Aussage von Korollar 8.4 ist symmetrisch in μ_1 und μ_2, d.h. es gilt ebenfalls

$$\mu f = \iint f(\omega_1, \omega_2)\mu_1(d\omega_1)\mu_2(d\omega_2).$$

2. Man kann Korollar 8.4 auch für eine nichtnegative messbare Funktion f formulieren. Den sich ergebenden Satz bezeichnet man auch als „Satz von Tonelli“.

27. a) Seien $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mu_1 = \mu_2$ das aus Aufgabe 9 bekannte Zählmaß. Ferner sei die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ gegeben durch $f(n, n) = n$ und $f(n, n+1) = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f(i, j) = 0$, falls $j \neq i$ und $j \neq i + 1$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y)\mu_2(dy)\mu_1(dx) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y)\mu_1(dx)\mu_2(dy) = \infty.$$

Warum ist der Satz von Fubini (Korollar 8.4) nicht anwendbar?

b) Seien $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{B}$, $\mu_1 = \lambda^1$ und μ_2 das Zählmaß aus Aufgabe 9. Ferner sei $A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : \omega_1 = \omega_2\} \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} 1_A(\omega_1, \omega_2)\mu_2(d\omega_2)\mu_1(d\omega_1) &= \infty \qquad \text{und} \\ \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} 1_A(\omega_1, \omega_2)\mu_1(d\omega_1)\mu_2(d\omega_2) &= 0. \end{aligned}$$

Warum ist der Satz von Fubini (Korollar 8.4) nicht anwendbar?

Hinweis: Beachten Sie die Hinweise 1 und 2 zu Aufgabe 26. In b) ist anzugeben, warum Korollar 8.4 in der Version für eine nichtnegative messbare Funktion f nicht angewendet werden kann.

28. (5 Punkte) Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sind in $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$:

a) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n < a\}$,

b) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < a\}$,

c) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert und ist endlich$\}$,

d) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \limsup_{n\to\infty} x_n \leq a\}$,

e) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$ für mindestens ein $n \in \mathbb{N}\}$.

Hinweis: Abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind in $\mathcal{B}^n$.

29. (3 Punkte) Ist X integrierbar und $PA_n \to 0$, so gilt $E1_{A_n}X \to 0$.

30. Beweisen Sie:

a) In der Hölder-Ungleichung gilt Gleichheit genau dann, wenn es Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ gibt, so dass $a|X|^p = b|Y|^q$ P-f.s.

b) Für $1 < p < \infty$ gilt Gleichheit in der Minkowski-Ungleichung genau dann, wenn es Konstanten $a, b \geq 0$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ gibt, so dass $aX = bY$ P-f.s. Welche Bedingungen müssen im Fall $p = 1$ erfüllt sein, damit Gleichheit gilt?