Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Sommersemester 2011**

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Serie 7
Abgabe: Dienstag, 24. Mai 2011, vor der Vorlesung

31. Für alle n seien $X_{n,k}$, $1 \le k \le n$, unabhängig und $b_n > 0$ mit $b_n \to \infty$. Setze $\bar{X}_{n,k} = X_{n,k} 1_{\{|X_{n,k}| \le b_n\}}$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_{n,k}$ und $a_n = \sum_{k=1}^n E\bar{X}_{n,k}$. Für $n \to \infty$ gelte
(i) $\sum_{k=1}^n P(|X_{n,k}| > b_n) \to 0$ und
(ii) $b_n^{-2} \sum_{k=1}^n E\bar{X}_{n,k}^2 \to 0$.
Dann konvergiert $\frac{S_n - a_n}{b_n}$ in Wahrscheinlichkeit gegen Null.

32. Sei $p \ge 1$. Gelte $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit mit $X \in L_p$. Ferner gebe es ein $Y \in L_p$, so dass $|X_n| \le Y$ für alle n. Dann gilt auch $X_n \to X$ in L_p.

33. Sind $X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen, so konvergiert die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann fast sicher, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$P\Bigg(\bigcup_{j,k\ge n} \{|X_j - X_k| > \varepsilon\}\Bigg) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

34. a) Wenn $X_n \to X$ in L_p und $Y_n \to Y$ in L_p für $p \ge 1$, dann auch $X_n + Y_n \to X + Y$ in L_p.

b) Seien $p > 1$ und $q = p/(p-1)$. Wenn $X_n \to X$ in L_p und $Y_n \to Y$ in L_q, dann gilt $X_nY_n \to XY$ in L_1.

c) Wenn $X_n \to X$ und $Y_n \to Y$ in Wahrscheinlichkeit, dann auch $X_n + Y_n \to X + Y$ und $X_nY_n \to XY$ in Wahrscheinlichkeit.

35. Beweisen Sie:

a) Der Grenzwert einer in Wahrscheinlichkeit konvergenten Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist f.s. eindeutig.

b) Konvergiert eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsvariable X, so gibt es eine Teilfolge $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die f.s. gegen X konvergiert.