Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Sommersemester 2011**

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Serie 9
Abgabe: Dienstag, 7. Juni 2011, vor der Vorlesung

41. (5 Punkte) Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen für
a) das Dirac-Maß δ_a,
b) das Maß $\frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})$,
c) die Bernoulli-Verteilung $B_{1,p}$,
d) die geometrische Verteilung G_p,
e) die Poisson-Verteilung P_λ,
f) die Gleichverteilung über einem symmetrischen Intervall $(-a, a)$.

42. (*Momente als Ableitungen der charakteristischen Funktion*)
Für $X \in L_n$ ist die charakteristische Funktion φ^X n-mal differenzierbar mit $\frac{d^n\varphi^X}{dt^n}(t) = i^n E(X^n e^{itX})$. Insbesondere gilt $\frac{d^n\varphi^X}{dt^n}(0) = i^n E(X^n)$.
Hinweis: Für $1 < q < p$ gilt $L_p \subset L_q$.

43. Beweisen Sie:
a) Falls die charakteristische Funktion φ einer Zufallsvariablen X absolut-integrierbar ist, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty$, dann hat X eine stetige Dichte f, die gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt.$$

b) Seien P_1 und P_2 zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}$. Falls $\int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_1(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_2(dx)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dann stimmen P_1 und P_2 überein.
Hinweis: Betrachten Sie die Inversionsformel.

44. (3 Punkte) a) Sei X eine Zufallsvarriable mit Dichte $p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann hat X die charakteristische Funktion $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
b) Sei Y eine C_a-verteilte Zufallsvariable mit Dichte $\frac{1}{a\pi} \frac{1}{1+(x/a)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann hat Y die charakteristische Funktion $\varphi(t) = e^{-a|t|}$.
c) Seien X_1 und X_2 unabhängig N_{μ,σ^2}- bzw. N_{ν,τ^2}-verteilt. Zeigen Sie mit Hilfe der charakteristischen Funktionen, dass $X_1 + X_2$ $N_{\mu+\nu,\sigma^2+\tau^2}$-verteilt ist.

45. Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, jeweils C_a-verteilter Zufallsvariablen mit der Dichte

$$f_a(x) = \frac{1}{a\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche γ konvergiert

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^\gamma}$$

in Verteilung?

b) Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz jeweils die Grenzverteilung.