Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

Sommersemester 2011

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Serie 10

Abgabe: Dienstag, 21. Juni 2011, vor der Vorlesung

46. Seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, $B_{n,p}$-verteilte Zufallsvariablen mit $p \in (0,1)$. Definiere $Y_n = \log(X_n/n)$ für $X_n \geq 1$ und $Y_n = 1$ für $X_n = 0$. Zeigen Sie, dass

$$n^{1/2}(Y_n - \log p) \Rightarrow N_{0,\frac{1-p}{p}}.$$

47. Für ein gegebenes W-Maß μ auf $\mathcal{B}^1$ betrachte man auf $\mathcal{B}^n$ das W-Maß $P = \mu \otimes \ldots \otimes \mu$ (mit n Faktoren). Es bezeichne $\mathcal{G}$ das System aller Mengen $B \in \mathcal{B}^n$ mit der Eigenschaft, dass für jede Permutation $i_1, \ldots, i_n$ von $1, \ldots, n$ mit jedem Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n)$ aus B auch $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ in B liegt. Man zeige:

a) $\mathcal{G}$ ist eine Sub-σ-Algebra von $\mathcal{B}^n$.

b) Für jede integrierbare Zufallsvariable X auf dem W-Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P)$ stimmt $E(X|\mathcal{G})$ fast sicher mit der Funktion

$$x \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{i_1,\ldots,i_n} X(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$$

überein. Die Summation erstreckt sich dabei über alle Permutationen von $1, \ldots, n$.

48. Sei $P|\mathcal{B}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Lebesgue-Dichte f und X eine integrierbare Zufallsvariable auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Ferner sei $\mathcal{B}_0$ die Sub-σ-Algebra, die von den um 0 symmetrischen Intervallen erzeugt wird. Berechnen Sie $E(X|\mathcal{B}_0)$.

49. Gegeben sei der W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Für ein $A \in \mathcal{F}$ setzen wir $P(A|Y = y) = E(1_A|Y = y)$. Seien weiter X und Y Zufallsvariablen mit stetiger gemeinsamer Lebesgue-Dichte f, d.h. $P^{(X,Y)}$ besitze die Lebesgue-Dichte f. Zudem sei X P-integrierbar und es gelte

$$f_2(y) = \int f(x,y)\, \lambda(dx) > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie:

a) $E(X|Y=y) = \frac{1}{f_2(y)} \int x f(x,y)\,\lambda(dx)$ für P^Y-fast alle y,

b) $P(X \le t|Y=y) = \frac{1}{f_2(y)} \int_{(-\infty,t]} f(x,y)\,\lambda(dx)$ für P^Y-fast alle y.

Bemerkung: Die Funktion

$$P(X \le t|Y=y) = \frac{1}{f_2(y)} \int_{(-\infty,t]} f(x,y)\,\lambda(dx),\ t \in \mathbb{R},$$

wird *bedingte Verteilungsfunktion von X gegeben $Y=y$* genannt. Die Funktion

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)},\ x \in \mathbb{R},$$

heißt *bedingte Dichte von X gegeben $Y=y$.*

50. Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 besitzen die gemeinsame Dichte

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\varrho^2)}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\varrho^2)}(x-\mu_1, y-\mu_2)\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\varrho\sigma_1\sigma_2 \\ -\varrho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}\binom{x-\mu_1}{y-\mu_2}}.$$

Bestimmen Sie die bedingte Dichte von X_2 gegeben $X_1 = x$ und berechnen Sie damit den bedingten Erwartungswert $E(X_2|X_1)$.