Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Sommersemester 2011**

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Serie 11
Abgabe: Dienstag, 28. Juni 2011, vor der Vorlesung

51. Sei Y eine integrierbare, nichtnegative reelle Zufallsvariable auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Für zwei Sub-σ-Algebren $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ von $\mathcal{F}$ bezeichne $\mathcal{G}_3$ die von $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$. Beweisen Sie, dass dann die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $E(Y|\mathcal{G}_3) = E(Y|\mathcal{G}_2)$ f.s.

(b) $E(XY|\mathcal{G}_2) = E(X|\mathcal{G}_2)E(Y|\mathcal{G}_2)$ f.s. für alle $\mathcal{G}_1$-messbaren reellen Zufallsvariablen $X \geq 0$.

Beachten Sie dabei, dass $\mathcal{E} := \{C_1 \cap C_2 : C_1 \in \mathcal{G}_1, C_2 \in \mathcal{G}_2\}$ ein π-System ist, das die σ-Algebra $\mathcal{G}_3$ erzeugt.

52. a) (*Der bedingte Erwartungswert ist eine Projektion.*) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{G}$ eine Sub-σ-Algebra. Sei weiter $X \in L_2(P|\mathcal{F})$. Dann gilt

$$E(XY) = E\big(YE(X|\mathcal{G})\big)$$

für alle $Y \in L_2(P|\mathcal{G})$, also $X - E(X|\mathcal{G}) \perp L_2(P|\mathcal{G})$. Folgern Sie, dass der bedingte Erwartungswert $E(X|\mathcal{G})$ (bis auf f.s. Gleichheit) die einzige $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable $X_0 \in L_2(P|\mathcal{G})$ ist, die $E[(X - X_0)^2]$ minimiert.

b) (*Selbstadjungiertheit des bedingten Erwartungswertes*) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{G}$ eine Sub-σ-Algebra. Sind $X, Y \in L_2(P|\mathcal{F})$, dann gilt:

$$E\big(E(X|\mathcal{G})Y\big) = E\big(XE(Y|\mathcal{G})\big).$$

Hinweis: $X \in L_2(P|\mathcal{G})$ heißt $X \in L_2(P)$ und X $\mathcal{G}$-messbar.

53. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $EX_1 = 0$ und $E[X_1^2] = \sigma^2 < \infty$. Dann ist

$$\left(\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j\Big)^2 - n\sigma^2, \sigma(X_1, \ldots, X_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

ein Martingal.

54. Sei μ eine nichtnegative, endliche und σ-additive Mengenfunktion auf der σ-Algebra $\mathcal{F}$. Seien ferner $A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots$ Mengen aus $\mathcal{F}$ mit $\Omega = \sum_{j=1}^{\infty} A_{n,j}$ und $P(A_{n,j}) > 0$ für alle j. Setze $\mathcal{F}_n := \sigma(A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots)$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Zerlegung $A_{n+1,1}, A_{n+1,2}, \ldots$ verfeinere die n-te Zerlegung des Grundraumes, d.h. für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiere ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $A_{n+1,j} \subset A_{n,k}$. Dann gilt $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. Definiere

$$X_n(\omega) = \frac{\mu(A_{n,j})}{P(A_{n,j})} \quad , \text{ falls } \omega \in A_{n,j},\ n, j \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal ist.

55. Sei $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal. Definiere

$$Y_0 := X_0, Y_n := Y_{n-1} + (X_n - E(X_n | \mathcal{F}_{n-1})) \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

sowie $A_0 := 0$ und

$$A_n := A_{n-1} + (X_{n-1} - E(X_n | \mathcal{F}_{n-1})) \text{ für } n \geq 1.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $X_n = Y_n - A_n$.

(b) $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal.

(c) Für fast alle ω ist $A_n(\omega)$ nichtfallend in n.