Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Sommersemester 2012**

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 1
Abgabe: Dienstag, 10. April 2012, vor der Vorlesung

1. (4 Punkte) Sei $\mathcal{P}$ die Familie der Verteilungen auf $\mathcal{B}$ mit Lebesgue-Dichte. Berechnen Sie das M-Funktional und einen M-Schätzer für $\psi_\vartheta(x) = |x - \vartheta|$.

2. Sei $\hat{t}$ ein (eindimensionaler) Schätzer mit

$$n^{1/2}(\hat{t} - t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} g(X_i) + o_p(1)$$

für ein $g \in L_2(P)$ mit $Pg = 0$. Sei f_s stetig differenzierbar in $s = t$, $f_t \in L_2(P)$ sowie $|\dot{f}_s| \leq H$ für s in einer Umgebung von t und ein P-integrierbares H. Was schätzt der *Einschritt-Schätzer*

$$\hat{\vartheta} = \hat{t} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_{\hat{t}}(X_i),$$

und wie ist seine asymptotische Verteilung?

Seien Θ ein Parameterraum, $\mathcal{F} = \{f_\vartheta, \vartheta \in \Theta\}$ eine Familie von W-Dichten und $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Beobachtungen mit einer Dichte $f_\vartheta \in \mathcal{F}$. Der *Maximum-Likelihood-Schätzer* $\hat{\vartheta}$ maximiert die *Likelihood-Funktion* $\vartheta \mapsto \prod_{i=1}^{n} f_\vartheta(X_i)$ (bzw. die *log-Likelihood-Funktion* $\sum_{i=1}^{n} \log f_\vartheta(X_i)$).

3. (6 Punkte) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte f_ϑ. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ in den folgenden Fällen:

a) f_ϑ ist die Dichte der Gleichverteilung auf dem Intervall $(\vartheta, 2\vartheta)$ mit $\vartheta > 0$.

b) f_ϑ ist die Dichte der $N_{\vartheta,\vartheta^2}$-Verteilung mit $\vartheta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

c) $f_\vartheta(x) = \beta a^\beta x^{-(\beta+1)} 1_{(a,\infty)}(x)$ mit $\vartheta = (a, \beta) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$.

4. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte $\vartheta f(\vartheta x)$, wobei f eine stetig differenzierbare Lebesgue-Dichte auf $(0, \infty)$ (oder symmetrisch um 0) und $\vartheta > 0$ ein unbekannter Parameter ist. Zeigen Sie, dass die Likelihood-Funktion eine eindeutige Maximalstelle besitzt, wenn $xf'(x)/f(x)$ für $x > 0$ streng monoton fallend ist. Weisen Sie nach, dass diese Bedingung erfüllt ist, wenn $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ die Dichte der Cauchy-Verteilung ist.