Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2012**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 4
Abgabe: **spätestens bis Mittwoch, 2. Mai 2012, in Zimmer 221**

13. (4 Punkte) Sind $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit Verteilungsfunktion F, so ist die Verteilungsfunktion F_r der r-ten Ordnungsstatistik $X_{r:n}$ gegeben durch

$$F_r(x) = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} (F(x))^i (1 - F(x))^{n-i}.$$

Ist zusätzlich F differenzierbar mit Ableitung f, so besitzt $X_{r:n}$ die Dichte

$$f_r(x) = r \binom{n}{r} (F(x))^{r-1} (1 - F(x))^{n-r} f(x).$$

14. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte $f(x) = e^{-x} 1_{[0,\infty)}(x)$.

a) Berechnen Sie die gemeinsame Dichte der Ordnungsstatistiken $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$.

b) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $Z_1 = nX_{1:n}, Z_2 = (n-1)(X_{2:n} - X_{1:n}), \dots, Z_n = X_{n:n} - X_{(n-1):n}$ unabhängig sind. Wie sind sie verteilt?

c) Leiten Sie eine Darstellung für $X_{k:n}$, $k = 1, \dots, n$, in Abhängigkeit von den Zufallsvariablen $Z_1, \dots, Z_n$ her und bestimmen Sie damit $EX_{k:n}$ und $\mathrm{Var}(X_{k:n})$.

15. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$f_\vartheta(x) = \frac{3}{2}(x - \vartheta)^2 1_{[\vartheta-1,\vartheta+1]}(x), \; c > 0.$$

a) Der Stichprobenmedian $X_{[\frac{n}{2}]:n}$ ist konsistent für ϑ.

b) Sei $Z_n = n^{1/6}(X_{[\frac{n}{2}]:n} - \vartheta)$. Zeigen Sie, dass Z_n^3 asymptotisch normal ist mit Mittelwert 0 und endlicher Varianz.

16. *(Bahadur-Darstellung)* **(6 Punkte)** Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Sei F stetig differenzierbar in ξ_p mit $F'(\xi_p) > 0$.

a) Setze für $t \in \mathbb{R}$ $\xi_{nt} := \xi_p + tn^{-1/2}$, $Z_n(t) := n^{1/2}\frac{F(\xi_{nt})-\mathbb{F}_n(\xi_{nt})}{F'(\xi_p)}$ und $U_n(t) = n^{1/2}\frac{F(\xi_{nt})-\mathbb{F}_n(\hat{\xi}_p)}{F'(\xi_p)}$. Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$Z_n(t) - Z_n(0) = o_p(1) \quad \text{und} \quad U_n(t) = t + o_p(1).$$

b) Beweisen Sie mit Hilfe von a), dass gilt

$$\hat{\xi}_p = \xi_p + \frac{F(\xi_p) - \mathbb{F}_n(\xi_p)}{F'(\xi_p)} + o_p(n^{-1/2}).$$

Hinweis: Verwenden Sie (ohne Beweis) die folgende Aussage: Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von Zufallsvariablen. $(X_n)_n$ sei beschränkt in Wahrscheinlichkeit und für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gelte

$$P(X_n \leq t, Y_n \geq t + \varepsilon) + P(X_n \geq t + \varepsilon, Y_n \leq t) \to 0.$$

Dann gilt $X_n - Y_n = o_p(1)$.