Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2012**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 6

Abgabe: Dienstag, 15. Mai 2012, vor der Vorlesung

21. Sei f eine Dichte mit $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) > 0$ für $x \geq 0$. Auf $(0, \infty)$ sei sie zweimal stetig differenzierbar mit Lipschitz-stetiger zweiter Ableitung. Ferner sei K ein Kern mit Träger $[-1, 1]$ und $\int u^2 K(u) du < \infty$ sowie $x = x_n = \alpha b$ mit einer Konstante $\alpha \in [0, 1/2]$.

a) Zeigen Sie, dass

$$E\hat{f}(x) = f(x)\mu_{0,\alpha}(K) - bf'(x)\mu_{1,\alpha}(K) + \frac{1}{2}b^2 f''(x)\mu_{2,\alpha}(K) + O(b^3),$$

wobei $\mu_{k,\alpha}(K) := \int_{-1}^{\alpha} z^k K(u) du$, und vergleichen Sie die gefundene Konvergenzrate mit derjenigen für einen Punkt $x > b$.

b) Definiere

$$K^*(u; \alpha) := \frac{\mu_{2,\alpha}(K) - \mu_{1,\alpha}(K)u}{\mu_{0,\alpha}(K)\mu_{2,\alpha}(K) - \mu_{1,\alpha}^2(K)} K(u) 1_{(-1,\alpha)}(u).$$

Berechnen Sie die Konvergenzrate von $E\hat{f}(x)$ für diesen Kern.

22. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Zugehörigkeit zu $\mathrm{Lip}_{r,1}(L)$ bzw. $\mathcal{L}_{r,1}$:

a) $f(x) = \frac{1}{2} 1_{[-1,1]}(x)$,
b) $g(x) = \exp(-\frac{1}{1-x^2}) 1_{(-1,1)}(x)$,
c) $h(x) = (1 + x) 1_{[-1,0]}(x) + (1 - x) 1_{(0,1]}(x)$.

23. Sei f eine absolutintegrierbare Dichte und $K(x) := \frac{\sin x}{\pi x}$. Zeigen Sie, dass der Bias des zugehörigen Kernschätzers $\hat{f}(x)$ gleich

$$B_n(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-b^{-1}, b^{-1}]} \varphi_f(t) e^{-itx} \, dt$$

ist, wobei φ_f die charakteristische Funktion von f bezeichne. Ist φ_f integrierbar, so konvergiert dies gegen Null. Fällt die charakteristische Funktion φ_f algebraisch ab von einem Grad $p > 0$, d.h. es gebe ein $\gamma > 0$ mit

$$\lim_{t \to \infty} |t|^p \varphi_f(t) = \gamma,$$

dann ist $b^{-(p-1)}|B_n(x)|$ für $p > 1$ beschränkt.

24. Sei $\hat{f}(x)$ definiert wie in Aufgabe 23. Zeigen Sie, dass der mittlere integrierte quadratische Fehler (MISE) gegeben ist durch

$$\frac{1}{2\pi}\|\varphi_f\|_2^2 + \frac{1}{\pi n}\left[\frac{1}{b} - (n+1)\int_0^{b^{-1}} |\varphi_f(t)|^2 \, dt\right].$$

Hinweise zu Aufgabe 23 und 24: Für Funktionen mit integrierbarer charakteristischer Funktion gilt $\frac{1}{2\pi}\int e^{-itx}\varphi_f(t)dt = f(x)$. Die Parseval-Identität $\frac{1}{2\pi}\int |\varphi_f(t)|^2 dt = \int f^2(x)dx$ könnte ebenfalls nützlich sein.