Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

Sommersemester 2012

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 8

Abgabe: Dienstag, 5. Juni 2012, vor der Vorlesung

29. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$f(x) = (1+x)1_{(-1,0]}(x) + (1-x)1_{(0,1)}(x).$$

Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung von $X_{1:n}$ und $X_{n:n}$.

30. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 + x^2} \quad , x \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung von $X_{1:n}$ und $X_{n:n}$.

31. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte

$$f(x) = e^{-x}1_{(0,\infty)}(x).$$

Wie sind $X_{n:n} - \log n$ und $nX_{1:n}$ asymptotisch verteilt?

32. Den Erwartungswert $Eg(X)$ einer bekannten Funktion g kann man aufgrund unabhängiger Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ mit Dichte f sowohl mit dem empirischen Schätzer als auch mit dem geglätteten empirischen Schätzer, also mit

$$\mathbb{G} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) \quad \text{und} \quad \hat{\mathbb{G}} = \int g(x)\hat{f}(x)dx,$$

schätzen. Hier ist $\hat{f}$ zum Beispiel ein geeigneter Kernschätzer der Dichte f. Geben Sie Bedingungen an, unter denen beide Schätzer asymptotisch äquivalent sind, d.h. $n^{1/2}(\hat{\mathbb{G}} - \mathbb{G}) = o_p(1)$. Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung.